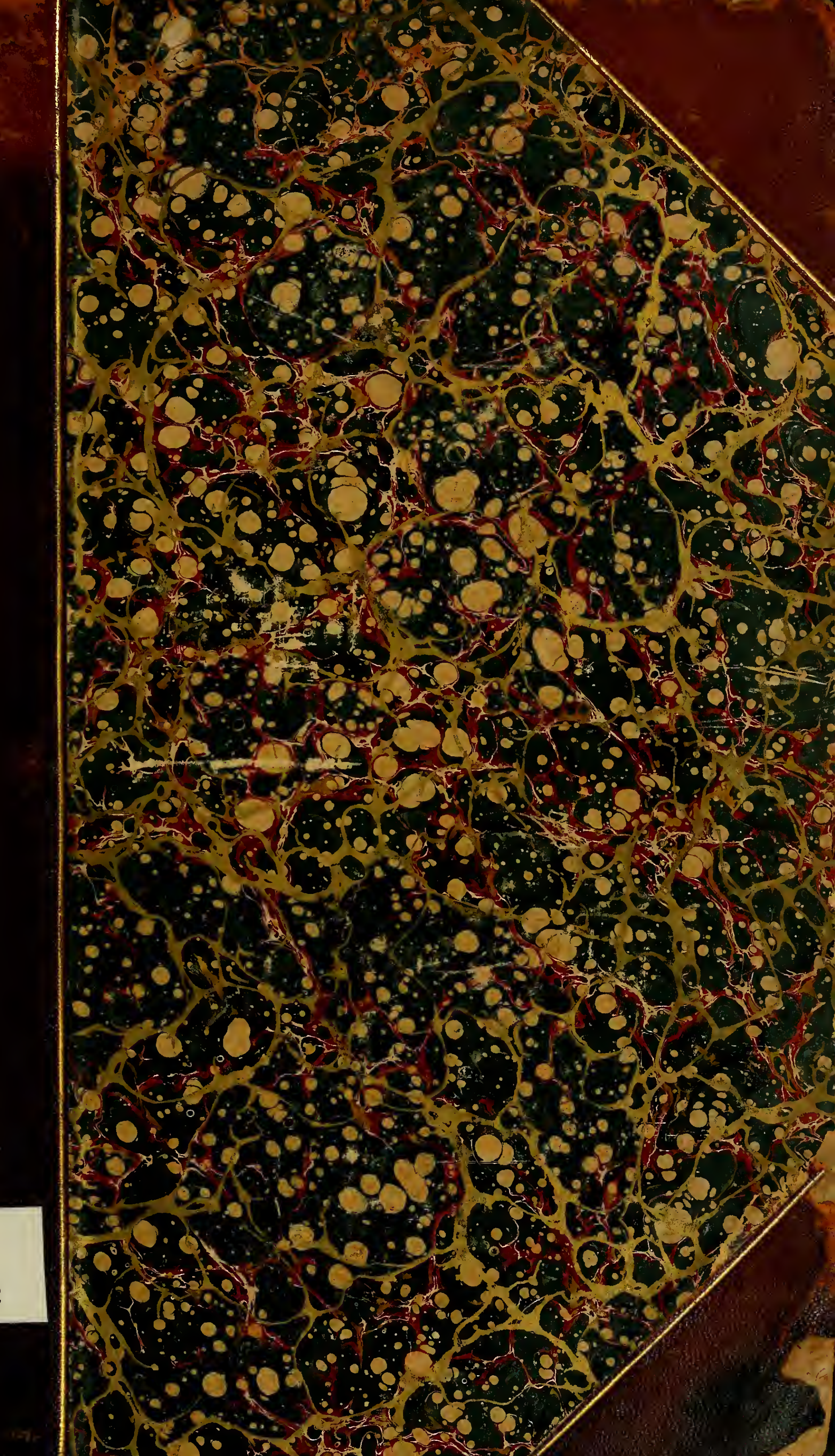
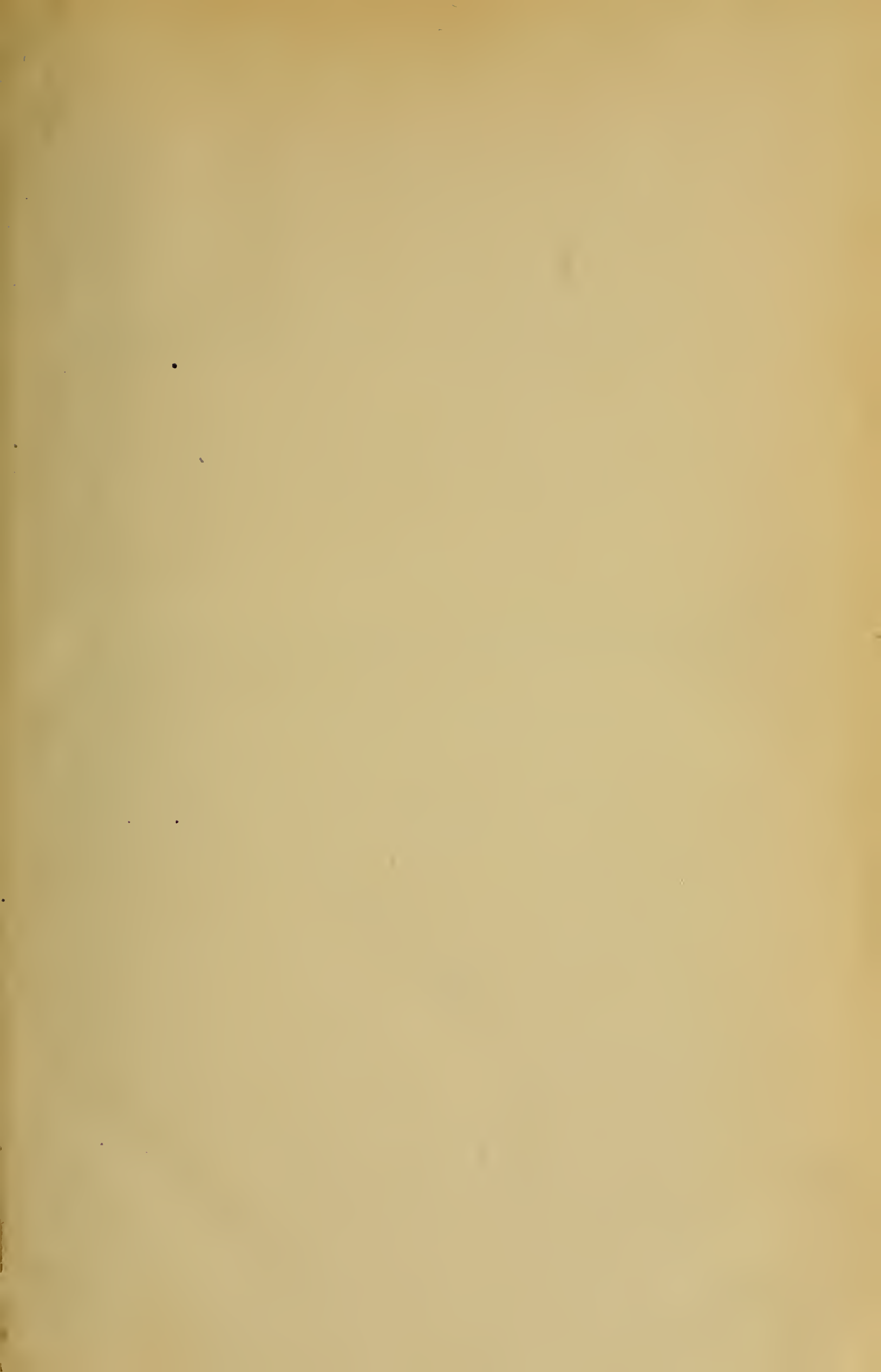










THEORIE

DER

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

DR. ANDREW RUSSELL FORSYTH, F. R. S.,

PROFESSOR AM TRINITY COLLEGE ZU CAMBRIDGE.

ERSTER THEIL:

EXACTE GLEICHUNGEN UND DAS PFAFF'SCHE PROBLEM.

AUTORISIRTE DEUTSCHE AUSGABE

VON

H. MASER.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1893.



Vorwort des Herausgebers.

Das im Jahre 1889 in zweiter Auflage erschienene Buch des Verfassers „A Treatise on Differential Equations“, von welchem auch eine vom Unterzeichneten besorgte deutsche Uebersetzung erschienen ist*), behandelte die elementaren Methoden, welche für die Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung hauptsächlich in Frage kommen. Dem elementaren Charakter und dem praktischen Zwecke des Buches entsprechend, hatten indessen in demselben die Integrationsmethoden für die partiellen Differentialgleichungen nur eine sehr kurze und lückenhafte Behandlung erfahren können. Das vorliegende Werk füllt nun diese Lücke zu einem gewissen Theile aus, indem es für einen begrenzten Theil des Gebietes der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, welcher indessen mit der allgemeinen Theorie dieser Gleichungen in engster Beziehung steht, nämlich für die sogenannten Pfaff'schen Gleichungen, nach einander die Methoden darlegt, welche bisher für die Integration solcher Gleichungen vorgeschlagen wurden. Wenn auch hierbei naturgemäss die Vortheile und Nachtheile der einzelnen Methoden hervorgehoben werden und die Tragweite derselben einer Erörterung unterzogen wird, so ist das Buch doch nicht als eine historisch-kritische Studie im strengen Sinne des Wortes aufzufassen, vielmehr ist der Zweck des Buches, was bei einer Beurtheilung im Auge zu behalten ist, ein wesentlich praktischer, nämlich dem Studirenden, oder wer sich sonst in die Theorie des Pfaff'schen Problems einzuarbeiten wünscht, einen Ueberblick über die für diesen schwierigen Gegenstand in Betracht kommenden Arbeiten zu geben und ihn zu befähigen, vorkommende specielle Aufgaben zu lösen und eventuell auf dem betrachteten Gebiete selbstständig weiter zu arbeiten.

*) Unter dem Titel: Lehrbuch der Differentialgleichungen von Dr. A. R. Forsyth, Braunschweig 1889, Friedrich Vieweg & Sohn.

In letzterer Beziehung dürfte insbesondere das Schlusskapitel, welches die Systeme von Pfaff'schen Gleichungen behandelt und auch einige neue vom Verfasser herrührende Untersuchungen enthält, geeignet sein anregend zu wirken, da hier in präciser Form die Aufgaben angegeben werden, welche auf diesem bisher wenig bebauten Felde noch ihrer Lösung harren.

Während ich meiner Uebersetzung des Treatise on Differential Equations einen Anhang beigegeben hatte, in welchem die Lösungen der im Buche aufgeführten Uebungsaufgaben zusammengestellt waren, glaubte ich im vorliegenden Falle von einem solchen Anhange absehen zu dürfen. Denn einerseits ist das Buch doch immerhin schon für Fortgeschrittenere bestimmt, welche eine Controle ihrer Rechnungen nicht mehr so nöthig haben wie Anfänger, andererseits würde auch schon eine blosse Skizzirung der Auflösung dieser schwierigen Aufgaben einen recht erheblichen Raum beansprucht haben, der vielleicht nicht mehr im Verhältniss zu dem mit einem derartigen Anhange zu erzielenden Nutzen gestanden hätte.

Berlin, im October 1892.

H. Maser.

Vorwort des Verfassers.

Durch den vorliegenden Band erhält ein Versprechen theilweise seine Erfüllung, welches von mir bei Veröffentlichung meines Buches „A Treatise on Differential Equations“ gemacht wurde. Es war meine Absicht, Alles, was zur Entwicklung des besonderen in dem gegenwärtigen Buche behandelten Gegenstandes wesentlich beigetragen hat, zusammenzustellen, und die historische Form, deren ich mich bei der Darlegung desselben bediente, ermöglichte es zugleich, ein anschauliches Bild von dem fortlaufenden Gange der Entwicklung zu geben.

Auf die Quellen, aus denen ich geschöpft habe, ist an geeigneter Stelle hingewiesen worden. Ich habe einige Untersuchungen hinzugefügt, die, wie ich glaube, neu sein dürften. Ferner habe ich zur Erläuterung der verschiedenen Methoden einige Beispiele gegeben.

Cambridge, 28. Juli 1890.

A. R. Forsyth.

Inhaltsverzeichniss.

1. Kapitel.

Eine einzige exacte Gleichung.

2. Kapitel.

Systeme exacter Gleichungen.

3. Kapitel.

Historische Uebersicht über die Methoden zur Behandlung des Pfaff'schen Problems.

4. Kapitel.

Pfaff's Reductionsmethode, vervollständigt durch Gauss und Jacobi.

5. Kapitel.

Grassmann's Methode.

6. Kapitel.

Natani's Methode.

7. Kapitel.

Anwendung auf partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

8. Kapitel.

Methode von Clebsch.

9. Kapitel.

Berührungstransformationen.

10. Kapitel.

Lie's Methode.

11. Kapitel.

Methode von Frobenius.

12. Kapitel.

Abriss der Methode von Darboux.

13. Kapitel.

Systeme von Pfaff'schen Gleichungen.

1. Kapitel.

Eine einzige exacte Gleichung*).

§ 1.

Ist eine Anzahl von Veränderlichen $x, y, z, u, \ldots$ durch eine dauernde Relation von der Form

$$\varphi(x, y, z, u, \ldots) = a, \tag{1}$$

wo a eine Constante ist, verbunden, so werden irgendwelche gleichzeitigen kleinen Variationen $dx, dy, dz, du, \ldots$, welchen die Veränderlichen unterworfen werden, in der Beziehung zu einander stehen, dass die Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \cdots = 0$$

erfüllt ist; und wenn eine Relation zwischen den kleinen Variationen in dieser Form gegeben ist, so erhält man die äquivalente Integralbeziehung unmittelbar in der Form der ersten Gleichung.

Die Gleichung, welche diese kleinen Variationen mit einander verknüpft, ist exact, da ihre linke Seite ein exactes Differential ist. Wenn aber die ersten Differentialquotienten von φ nach den Veränderlichen einen gemeinsamen Factor μ haben, so dass wir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu P, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu Q, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mu R, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \mu S, \ldots$$

*) Es mag bemerkt werden, dass die Untersuchungen im ersten Kapitel bezüglich der exacten linearen Gleichungen eine weitere Ausführung der sehr kurzen in den §§ 150—164 meines Treatise on Differential Equations (unter dem Titel: „Lehrbuch der Differentialgleichungen“ deutsch herausgegeben von H. Maser. Braunschweig 1889. Fr. Vieweg & Sohn) gegebenen Skizze dieser Art Gleichungen sind. Im Folgenden werden wir das genannte Werk kurz als „Lehrbuch“ citiren. Ferner sind die Untersuchungen im zweiten Kapitel bezüglich der Integration von Systemen partieller Differentialgleichungen im Besonderen dazu bestimmt, Mayer's Theorie eines Systems von Gleichungen von specieller Form darzulegen und die Untersuchungen von Bour und Jacobi zu ergänzen.

setzen können, so geht die die Variationen verbindende Relation nach Weghebung des von diesen Variationen nicht abhängenden Factors μ über in

$$Pdx + Qdy + Rdz + Sdu + \cdots = 0. \tag{2}$$

Diese neue Gleichung (2) ist im Wesentlichen dieselbe wie die frühere Gleichung; indessen ist sie nicht nothwendig — und dies wird der allgemeinere Fall sein — eine exacte Gleichung. Um sie zu einer exacten Gleichung zu machen, so dass die Integralrelation (1) daraus abgeleitet werden kann, muss der Factor μ, den wir den integrirenden Factor nennen können, wieder hergestellt werden, und da in der reducirten Gleichung keine Andeutung über die Form des Factors μ übrig geblieben ist, so muss die Bestimmung dieses Factors durch eine besondere Untersuchung geschehen.

§ 2.

Es giebt noch andere mit (1) äquivalente Formen von Relationen, welche zu derselben Gleichung (2) führen. Ist Φ irgend eine Function von φ, etwa

$$\Phi = f(\varphi),$$

so kann, wenn c der Werth von $f(a)$ ist, die Gleichung (1) ersetzt werden durch

$$\Phi = c, \tag{1'}$$

worin Φ eine Function von $x, y, z, u \dots$ und c eine Constante ist. Dieselben kleinen Variationen, welchen die Veränderlichen unterworfen werden, sind nun durch die Gleichung verbunden:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial u} du + \cdots = 0.$$

Da aber $x, y, z, u, \dots$ in Φ nur vermöge φ vorkommen, so hat man

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \mu P = P\mu f'(\varphi)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \mu Q = Q\mu f'(\varphi)$$

u. s. w.

und somit reducirt sich die die Variationen verbindende Gleichung nach Weghebung des Factors M, wo

$$M = \mu f'(\varphi)$$

ist, wie vorher auf die Gleichung (2); es ist daher M ein integrirender Factor, vermittelst dessen wir die Gleichung (1′) erhalten können.

Hiernach haben wir für jede Form von f, welche zu einer der Form nach neuen Integralgleichung führt, einen entsprechenden integrirenden Factor.

Wir wollen eine Function der Variablen eine Lösung von (2) nennen, wenn (2) durch diejenige Relation befriedigt wird, welche man erhält, wenn man jene Function einer Constanten gleichsetzt. Daher sind die Functionen φ und Φ Lösungen von (2). Das eben erhaltene Resultat zeigt, dass, wenn zwei Grössen Functionen von einander sind, sie auch Lösungen der nämlichen Gleichung sind.

§ 3.

Umgekehrt, wenn die Differentialgleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz + Sdu + \cdots = 0$$

(die, wie wir annehmen, die einzige Relation sein möge, welche zwischen den Differentialen der Variablen besteht) mittels einer einzigen Integralgleichung befriedigt werden kann, so sind alle ihre Lösungen einander äquivalent, d. h. eine Lösung genügt, um alle Lösungen zu finden. Denn es seien

$$\varphi = \varphi(x, y, z, u, \ldots)$$
$$\Phi = \Phi(x, y, z, u, \ldots)$$

zwei Lösungen, so dass wir haben:

$$d\varphi = 0, \qquad d\Phi = 0.$$

Wird x zwischen den beiden Integralgleichungen eliminirt, so ist die resultirende Gleichung von der Form:

$$F(\varphi, \Phi, y, z, u, \ldots) = 0.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial F}{\partial \Phi} d\Phi + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial u} du + \cdots = 0$$

und daher:

$$\frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial u} du + \cdots = 0,$$

welches eine Differentialgleichung zwischen denselben Veränderlichen wie die ursprüngliche Differentialgleichung, aber von letzterer verschieden ist, da die Variation dx darin nicht vorkommt. Da aber die ursprüngliche Gleichung die einzige Relation zwischen den Differentialen der Variablen ist, so folgt, dafs die neue Gleichung, welche nicht infolge jener ursprünglichen Gleichung befriedigt wird, identisch stattfindet; somit:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \ldots,$$

so dass F explicit unabhängig von $y, z, u, \ldots$ ist und die Form annimmt:

$$F(\Phi, \varphi) = 0.$$

Hiernach kann Φ durch φ ausgedrückt werden, womit der Satz bewiesen ist.

§ 4.

Ferner sind die den Functionen Φ und φ entsprechenden integrirenden Factoren M und μ derart, dass

$$\frac{\mathsf{M}}{\mu} = f'(\varphi)$$

ist, und $f'(\varphi)$ ist als Function der Lösung φ selbst eine Lösung (§ 2); daher: Der Quotient zweier integrirenden Factoren ist, falls nicht eine Constante, eine Lösung der Gleichung.

Und: Wenn φ die durch den Factor μ bestimmte Lösung ist, so ist jeder andere Factor von der Form $\mu . \lambda(\varphi)$, wo λ eine Function von φ ist.

§ 5.

Wenn eine Differentialgleichung von der gegenwärtig in Betrachtung stehenden Form gegeben ist, so braucht nicht nothwendig eine einzige Integralgleichung zu existiren, durch welche sie befriedigt wird. Die Bedingungen, dass dem wirklich so ist, sind, dass die Coefficienten $P, Q, R, S, \ldots$ der Differentiale den partiellen Differentialquotienten einer Function proportional sind, Bedingungen, die nicht für jede beliebige Reihe willkürlich angenommener Grössen $P, Q, R, S, \ldots$ erfüllt sind. Und diese Bedingungen führen zu Relationen zwischen den Grössen, welche erfüllt sein müssen, wenn die Differentialgleichung eine einzige ihr äquivalente Integralgleichung besitzen soll. Wir wollen diese Relationen jetzt suchen.

Die Differentialgleichung sei

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p = 0 \tag{3}$$

und es werde angenommen, dass dieselbe aus der Gleichung

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \text{const.} \tag{4}$$

unter Wegwerfung des Factors μ nach der Differentiation abgeleitet sei. Dann ist

(5) $$\mu X_r = \frac{\partial \varphi}{\partial x_r}$$

für die Werthe $1, 2, \ldots, p$ von r. Aus den Gleichungen (5) folgt für irgend zwei Indices m und n:

$$\frac{\partial}{\partial x_m}(\mu X_n) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_m \partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n}(\mu X_m)$$

und daher:

$$X_n \frac{\partial \mu}{\partial x_m} - X_m \frac{\partial \mu}{\partial x_n} = \mu \left(\frac{\partial X_m}{\partial x_n} - \frac{\partial X_n}{\partial x_m} \right)$$
$$= \mu a_{m,n}$$

wo

(6) $$a_{m,n} = \frac{\partial X_m}{\partial x_n} - \frac{\partial X_n}{\partial x_m}$$

ist. Bezeichnet r irgend einen andern Index, so hat man analog:

$$X_r \frac{\partial \mu}{\partial x_n} - X_n \frac{\partial \mu}{\partial x_r} = \mu a_{n,r}$$

und

$$X_m \frac{\partial \mu}{\partial x_r} - X_r \frac{\partial \mu}{\partial x_m} = \mu a_{r,m}.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen resp. mit X_r, X_m, X_n und addirt man die Producte, so erhält man:

$$0 = \mu(a_{m,n} X_r + a_{n,r} X_m + a_{r,m} X_n)$$

oder, da μ nicht verschwindet,

(7) $$a_{m,n} X_r + a_{n,r} X_m + a_{r,m} X_n = 0.$$

Diese Gleichung, welche identisch stattfindet, wenn zwei der Indices einander gleich sind, gilt für jede Combination zu dreien der Indices der Reihe $1, 2, \ldots, p$, und somit ist die Anzahl der Gleichungen zwischen den Grössen X, welche von der nämlichen Form sind wie (7), gleich

$$\frac{1}{6} p(p-1)(p-2),$$

und zwar ist jede identisch befriedigt.

§ 6.

Diese Gleichungen sind indessen nicht alle von einander unabhängig. Nimmt man noch einen andern von m, n, r verschiedenen Index s, so hat man neben (7) noch:

(7′) $$a_{s,m} X_r + a_{r,s} X_m + a_{m,r} X_s = 0$$

(7″) $$a_{m,s} X_n + a_{s,n} X_m + a_{n,m} X_s = 0$$

(7‴) $$a_{n,r} X_s + a_{r,s} X_n + a_{s,n} X_r = 0.$$

Multiplicirt man (7), (7′), (7″) resp. mit X_s, X_n, X_r und addirt dann die Producte, so erhält man, in Anbetracht der Eigenschaft

$$a_{k,l} = -a_{l,k}$$

für alle Paare der Indices, die Relation:

$$X_m(a_{n,r}X_s + a_{r,s}X_n + a_{s,n}X_r) = 0,$$

welche in Wirklichkeit die Gleichung (7‴) ist, da X_m nicht Null ist. Demnach sind von den vier Gleichungen, deren jede drei aus einer Reihe von vier Indices enthält, nur drei von einander unabhängig; jede beliebige der vier Gleichungen kann aus den drei andern abgeleitet werden.

Als die drei von einander unabhängigen Gleichungen wollen wir diejenigen Gleichungen betrachten, welche die Indices m, n, r; m, r, s; m, s, n enthalten; in der vorher aufgestellten Reihe von Gleichungen sind dies die Gleichungen (7), (7′), (7″). Eliminirt man X_s zwischen (7′) und (7″), so erhält man:

$$a_{m,n}a_{s,m}X_r + (a_{m,n}a_{r,s} + a_{m,r}a_{s,n})X_m + a_{r,m}a_{s,m}X_n = 0,$$

und wenn zu dieser die mit $a_{m,s}$ multiplicirte Gleichung (7) addirt wird, so folgt nach Abwerfung des Factors X_m:

$$a_{m,n}a_{r,s} + a_{m,r}a_{s,n} + a_{m,s}a_{n,r} = 0.$$

Diese letzte Gleichung ist erfüllt, weil (7), (7′), (7″) erfüllt sind; dieselbe kann, wenn es in irgend einem Falle erwünscht ist, irgend eine dieser drei Gleichungen ersetzen.

Da die Gleichung, welche die Indices n, r, s enthält, aus den dreien ableitbar ist, welche je zwei von diesen Indices und irgend einen dritten, für alle drei gleichen Index enthalten, so kann man alle unabhängigen Gleichungen erhalten, wenn man irgend einen bestimmten Index, z. B. 1, nimmt und alle Combinationen zu dreien bildet. Das Aggregat aller dieser Combinationen zu dreien ist in Wirklichkeit das Aggregat, welches man erhält, indem man den Index 1 mit jedem Paar der andern Indices ausser 1, d. h. mit je zweien der Reihe 2, 3, . . ., p combinirt, und die Gleichungen in diesem Aggregat sind unabhängig von einander. Hiernach ist die Anzahl der unabhängigen Bedingungsgleichungen gleich

$$\frac{1}{2}(p-1)(p-2).$$

Es ist zu beachten, dass, wenn der Factor $\mu = 1$ ist, alsdann die Gleichungen sämmtlich infolge des Verschwindens der Grössen $a_{m,n}$ befriedigt sind, und die Bedingungsgleichungen sind in diesem Falle

$$a_{m,n} = 0$$

und ihre Anzahl ist $\frac{1}{2} p(p-1)$. Diese grössere Anzahl von Bedingungen ist eine Folge der weiter angenommenen Beschränkung, dass die ursprüngliche Gleichung in der gegebenen Form exact sein soll und daher nicht erst durch einen Factor zu einer solchen gemacht zu werden braucht.

§ 7.

Die Bedingungen von der Art wie (7) sind eine nothwendige Folge der Annahme, dass die linke Seite der Differentialgleichung (3) zu einem exacten Differential gemacht werden kann; es soll jetzt umgekehrt gezeigt werden, dass, wenn die Bedingungen (7) erfüllt sind, alsdann die Differentialgleichung zu einer exacten gemacht werden kann.

Aus der Theorie der Differentialgleichungen, welche nur zwei Variable x und y enthalten, ist bekannt, dass für eine Gleichung

$$Pdx + Qdy = 0$$

eine Function $\vartheta(x, y)$ von solcher Beschaffenheit existirt, dass die Differentialgleichung durch die Relation

$$\vartheta(x, y) = \text{const.}$$

befriedigt wird und dass daher P und Q bezüglich den Ableitungen von ϑ nach x und y proportional sind. Betrachtet man dann X_1 und X_2 als Functionen von x_1 und x_2, so schliessen wir, dass eine Function u von x_1 und x_2 von solcher Art existirt, dass für eine gewisse Grösse λ

$$\lambda X_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \lambda X_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

gesetzt werden kann und dass die Function u auch die andern Grössen, welche in X_1 und X_2 vorkommen, nämlich $x_3, x_4, \ldots, x_p$ enthält, deren Vorhandensein indessen keinen Einfluss auf die Differentiation nach x_1 und x_2 hat. Man darf aber nicht schliessen, dass die übrigen Coefficienten in der Gleichung in analoger Weise den übrigen Ableitungen proportional seien, und wir setzen daher:

$$\lambda X_r - \frac{\partial u}{\partial x_r} = Y_r \tag{8}$$

$$(r = 3, 4, \ldots, p),$$

wo Y_r als bekannt angesehen werden kann, wenn u, wie vorausgesetzt ist, bekannt ist.

Diese neuen Grössen Y_r werden gewissen Gleichungen genügen,

die man mittels des Systems (7) erhalten kann. Wir haben gesehen, dass von den vier Gleichungen, welche vier Indices enthalten, in jenem System nur drei beibehalten zu werden brauchen, und, wie wir bereits in § 6 dargelegt haben, können die beizubehaltenden Gleichungen gebildet werden

1) aus den $p-2$ Gleichungen mit den Indices 1, 2, r

2) „ „ $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ „ „ „ „ 1, r, s,

wo r und s von einander verschieden und Glieder der Reihe $3, 4, \ldots, p$ sind. Diese Reihe von Combinationen ist offenbar dieselbe wie die, welche man erhält, indem man den Index 1 mit jedem aus der Reihe $2, 3, \ldots, p$ gebildeten Paar von Indices combinirt.

§ 8.

Betrachten wir die erste der beiden Reihen von beibehaltenen Gleichungen, so haben wir für jeden Index r:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\lambda X_r - Y_r) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_r}(\lambda X_1),$$

also:

$$X_r \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} - X_1 \frac{\partial \lambda}{\partial x_r} = \lambda a_{1,r} + \frac{\partial Y_r}{\partial x_1}.$$

Analog:

$$X_r \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} - X_2 \frac{\partial \lambda}{\partial x_r} = \lambda a_{2,r} + \frac{\partial Y_r}{\partial x_2}$$

und

$$X_2 \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} - X_1 \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} = \lambda a_{1,2}.$$

Nun ist die vom System (7) beibehaltene Gleichung, welche die Indices 1, 2, r enthält,

$$a_{1,2} X_r + a_{2,r} X_1 + a_{r,1} X_2 = 0;$$

multipliciren wir daher die vorstehenden Gleichungen respective mit $-X_2$, X_1, X_r, addiren dieselben dann und machen von der Bedingungsgleichung Gebrauch, so erhalten wir:

$$X_1 \frac{\partial Y_r}{\partial x_2} - X_2 \frac{\partial Y_r}{\partial x_1} = 0.$$

Dies ist die einzige Gleichung der Reihe 1), welche Y_r allein enthält; sämmtliche Gleichungen der Reihe 2) enthalten zwei der Grössen Y und die Bedeutung solcher Gleichungen wird sofort angegeben werden. Wir können somit die vorstehende Gleichung als eine die Form von Y_r bestimmende Gleichung betrachten. Dieselbe ist

eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung; um die allgemeinste Lösung zu erhalten, suchen wir $p-1$ unabhängige Integrale der Hülfsgleichungen:

$$\frac{dx_1}{-X_2} = \frac{dx_2}{X_1} = \frac{dx_3}{0} = \frac{dx_4}{0} = \cdots = \frac{dx_p}{0}.$$

$p-2$ Integrale sind sofort gegeben in der Form

$$x_r = \text{const.} \quad (r = 3, 4, \ldots, p),$$

so dass nur noch eins zu suchen bleibt, welches gegeben wird durch:

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 = 0$$

oder

$$\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2\right) = 0$$

d. i.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 = 0.$$

In dem simultanen System verschwinden aber $dx_3, dx_4, \ldots$ sämmtlich, und daher kann die letzte Gleichung in der Form genommen werden:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} dx_3 + \cdots = 0$$

d. i.

$$du = 0,$$

und somit ist das andere gesuchte Integral

$$u = \text{const.}$$

Hieraus folgt nach der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen, dass Y_r von der Form ist

$$Y_r = f_r(u, x_3, x_4, \ldots, x_p), \tag{9}$$

wo f_r gegenwärtig irgend *eine beliebige* Function der Argumente sein kann.

Multiplicirt man die Gleichung (3) mit λ und setzt man für die Grössen λX ihre Werthe aus (8) ein, so ist die neue Form der Gleichung:

$$du + Y_3 dx_3 + Y_4 dx_4 + \cdots + Y_p dx_p = 0, \tag{3'}$$

wo die Grössen Y_r durch die Gleichungen (9) gegeben sind.

Hiernach ist mit Hülfe der ersten Reihe der beibehaltenen Gleichungen des § 7 *die gegebene Differentialgleichung (3) in eine andere (3′) transformirt, welche eine Variable weniger enthält.*

§ 9.

Betrachten wir nun die zweite der beiden Reihen von beibehaltenen Gleichungen des § 7. Wir nehmen eine typische Gleichung der Reihe, etwa:

$$a_{1,r} X_s + a_{r,s} X_1 + a_{s,1} X_r = 0.$$

Es ist aber:

$$\frac{\partial}{\partial x_r}(\lambda X_s - Y_s) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s} = \frac{\partial}{\partial x_s}(\lambda X_r - Y_r),$$

daher:

$$X_s \frac{\partial \lambda}{\partial x_r} - X_r \frac{\partial \lambda}{\partial x_s} = \lambda a_{r,s} + \frac{\partial Y_s}{\partial x_r} - \frac{\partial Y_r}{\partial x_s}.$$

Und vorher hatten wir:

$$X_r \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} - X_1 \frac{\partial \lambda}{\partial x_r} = \lambda a_{1,r} + \frac{\partial Y_r}{\partial x_1}$$

und analog:

$$X_s \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} - X_1 \frac{\partial \lambda}{\partial x_s} = \lambda a_{1,s} + \frac{\partial Y_s}{\partial x_1}.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen resp. mit X_1, X_s, $-X_r$, addirt sie dann und wendet die vorangestellte Relation an, so erhält man:

$$X_1\left(\frac{\partial Y_s}{\partial x_r} - \frac{\partial Y_r}{\partial x_s}\right) + X_s \frac{\partial Y_r}{\partial x_1} - X_r \frac{\partial Y_s}{\partial x_1} = 0.$$

In dieser Gleichung sind die Grössen Y_r und Y_s Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_p$, wie sie durch (8) gegeben sind. Nehmen wir ihre Formen als durch (9) bestimmt an, so erhalten wir:

$$\frac{\partial Y_r}{\partial x_1} = \frac{\partial f_r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1} = \lambda X_1 \frac{\partial f_r}{\partial u}$$

$$\frac{\partial Y_r}{\partial x_s} = \frac{\partial f_r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_s} + \frac{\partial f_r}{\partial x_s} = (\lambda X_s - f_s)\frac{\partial f_r}{\partial u} + \frac{\partial f_r}{\partial x_s}$$

und somit:

$$X_1 \frac{\partial Y_r}{\partial x_s} - X_s \frac{\partial Y_r}{\partial x_1} = X_1\left(\frac{\partial f_r}{\partial x_s} - f_s \frac{\partial f_r}{\partial u}\right);$$

analog:

$$X_1 \frac{\partial Y_s}{\partial x_r} - X_r \frac{\partial Y_s}{\partial x_1} = X_1\left(\frac{\partial f_s}{\partial x_r} - f_r \frac{\partial f_s}{\partial u}\right),$$

und daher geht die obige Gleichung nach Abwerfung des nichtverschwindenden Factors $-X_1$ über in:

$$\frac{\partial f_r}{\partial x_s} - \frac{\partial f_s}{\partial x_r} + f_r \frac{\partial f_s}{\partial u} - f_s \frac{\partial f_r}{\partial u} = 0 \tag{10}$$

für alle Combinationen der Indices r und s. Dies sind die Gleichungen, welche aus der zweiten Reihe der beibehaltenen Gleichungen des § 7 abgeleitet sind.

Es folgt daher, dass die Coefficienten der zu (3) äquivalenten transformirten Gleichung

$$du + f_3 dx_3 + f_4 dx_4 + \cdots + f_p dx_p = 0 \tag{3'}$$

den Bedingungen (10) unterworfen sind.

§ 10.

Da die neue Gleichung (3′) mit (3) äquivalent ist, so wollen wir die Bedingungen aufsuchen, welche zu (3′) in derselben Beziehung stehen, wie das System (7) zu (3). Geben wir u den Index 0 und definiren wir $b_{r,s}$ durch die Gleichung

$$b_{r,s} = \frac{\partial f_r}{\partial x_s} - \frac{\partial f_s}{\partial x_r}$$

für alle Paare der Indices $0, 3, 4, \ldots, p$, so ist die vollständige Reihe der zu (3′) gehörigen und (7) analogen Bedingungen:

$$b_{r,s} f_q + b_{s,q} f_r + b_{q,r} f_s = 0,$$

deren Anzahl $\frac{1}{6}(p-1)(p-2)(p-3)$ beträgt. Von diesen sind aber nur $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ unabhängig; und eine Reihe von unabhängigen Gleichungen kann man wie im früheren Falle dadurch erhalten, dass man alle diejenigen Gleichungen beibehält, die irgend einen Index, z. B. den Index 0, in Verbindung mit allen möglichen Paaren von Indices aus der Reihe $3, 4, \ldots, p$ enthalten. Nimmt man also $q = 0$, so hat man:

$$f_q = 1$$

$$b_{s,q} = \frac{\partial f_s}{\partial u}$$

$$b_{q,r} = -\frac{\partial f_r}{\partial u}$$

und daher ist die obige Bedingung:

$$\frac{\partial f_r}{\partial x_s} - \frac{\partial f_s}{\partial x_r} + f_r \frac{\partial f_s}{\partial u} - f_s \frac{\partial f_r}{\partial u} = 0,$$

welches die typische Gleichung des Systems (10) ist. Da die möglichen Combinationen der Indices für die beiden Reihen die nämlichen sind, so folgt, dass die von dem System (10) gebildeten Bedingungs-

gleichungen zu der transformirten Differentialgleichung dieselbe Beziehung haben, wie die durch das System (7) dargestellten Bedingungsgleichungen zu der ursprünglichen Differentialgleichung.

§ 11.

Wenn daher eine Differentialgleichung mit $p-1$ Veränderlichen von solcher Beschaffenheit, dass das zugehörige System von Bedingungen unter den Coefficienten befriedigt ist, durch eine einzige Integralgleichung dargestellt werden kann, so folgt, dass eine Differentialgleichung mit p Variablen von solcher Art, dass das zugehörige System von Bedingungen unter ihren Coefficienten befriedigt ist, ebenfalls durch eine einzige Integralgleichung dargestellt werden kann. Denn die vorhergehende Untersuchung zeigt, dass die den Bedingungen (7) unterworfene Gleichung (3) auf die an die Bedingungen (10) gebundene Gleichung (3′) zurückgeführt werden kann, so dass, wenn

$$F(u,\ x_3,\ x_4,\ldots,\ x_p) = \text{const.}$$

eine der letzteren äquivalente Integralgleichung ist, alsdann eine der ersteren äquivalente Integralgleichung gegeben ist durch

$$F\{f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,\ x_p),\ x_3,\ x_4,\ldots,\ x_p\} = \text{const.},$$

wo f eine Function ist, von der man weiss, dass sie existirt.

Wir benutzen daher die inductive Beweismethode. Im Falle $p=3$ ist die Gleichung:

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 = 0$$

und die einzige Bedingungsgleichung ist:

$$a_{2,3} X_1 + a_{3,1} X_2 + a_{1,2} X_3 = 0.$$

Die vorhergehende Untersuchung zeigt, dass eine Function u existirt von solcher Beschaffenheit, dass die Gleichung transformirt werden kann in

$$du + \varphi(u,\ x_3)\,dx_3 = 0,$$

wo φ keiner Bedingung unterliegt. Aus der Theorie der Differentialgleichungen mit zwei Variablen weiss man aber, dass eine gewisse Function F von solcher Art existirt, dass die transformirte Gleichung durch die Gleichung

$$F(u,\ x_3) = \text{const.}$$

befriedigt wird. Daher kann die ursprüngliche Gleichung mit drei Variablen, deren Coefficienten an eine einzige Bedingung geknüpft sind, durch eine einzige Integralgleichung

$$F\{f(x_1, x_2, x_3), x_3\} = \text{const.}$$

befriedigt werden.

Somit führt die Methode der Induction zu dem Schlusse, dass die Gleichung (3), deren Coefficienten den Bedingungen (7) unterworfen sind, mittels einer einzigen Integralgleichung befriedigt werden kann.

Das **Resultat der Untersuchung** kann folgendermassen ausgesprochen werden:

Wenn die Differentialgleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p = 0$$

mittels einer einzigen Integralgleichung von der Form

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \text{const.}$$

befriedigt werden kann, so wird das System von Bedingungen

$$a_{m,n} X_r + a_{n,r} X_m + a_{r,m} X_n = 0,$$

worin $a_{m,n} = \frac{\partial X_m}{\partial x_n} - \frac{\partial X_n}{\partial x_m}$ ist, identisch befriedigt für alle Combinationen der Indices m, n, r aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots, p$, und von diesen Bedingungsgleichungen sind nur

$$\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$$

von einander unabhängig. Umgekehrt, wenn das System von Bedingungen identisch befriedigt ist für alle Combinationen der Indices, so kann die Differentialgleichung durch eine einzige Integralgleichung von der Form

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \text{const.}$$

befriedigt werden.

Aus der vorhergehenden Untersuchung ergiebt sich noch der folgende Zusatz:

Es mögen $X_1, X_2, \ldots, X_p$ Functionen der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_p$ bezeichnen. Dann giebt es bekanntlich, was immer auch die Grössen X sein mögen, eine Function u_1 von solcher Beschaffenheit, dass

$$X_1 : X_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} : \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

ist. Besteht eine Relation

$$a_{2,3} X_1 + a_{3,1} X_2 + a_{1,2} X_3 = 0,$$

dann giebt es eine Function u_2 der Variablen von solcher Art, dass

$$X_1 : X_2 : X_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} : \frac{\partial u_2}{\partial x_2} : \frac{\partial u_2}{\partial u_3}$$

ist. Bestehen Relationen

$$a_{r,s} X_1 + a_{s,1} X_r + a_{1,r} X_s = 0$$

(für r, $s = 2, 3, 4$), so giebt es eine Function u_3 der Variablen von solcher Art, dass

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} : \frac{\partial u_3}{\partial x_2} : \frac{\partial u_3}{\partial x_3} : \frac{\partial u_3}{\partial x_4}$$

ist. U. s. w.

§ 12.

Wir nehmen nun an, dass die Differentialgleichung durch eine einzige Integralgleichung befriedigt werden kann. Wir wollen diese Gleichung suchen.

Eine Methode, die Lösung abzuleiten, würde die sein, dass man die in der eben vollendeten Untersuchung angedeuteten aufeinanderfolgenden Reductionen ausführt. Dies ist in Wirklichkeit Euler's Methode. Dieselbe kann kurz folgendermassen dargestellt werden:

Zuerst mögen alle Veränderlichen ausser x_1 und x_2 als constant betrachtet werden. Unter dieser Voraussetzung sei

$$u = u(x_1, x_2, \ldots) = \text{const.}$$

eine Lösung von

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 = 0,$$

so dass

$$X_1 : X_2 = \frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_2}.$$

Mit Hülfe der neuen Variablen u, worin

$$u = u(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p),$$

eliminire man aus der Differentialgleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + \cdots + X_p dx_p = 0$$

die Grössen x_1, x_2, dx_1, dx_2 — eine Elimination, welche immer möglich ist, sobald die Bedingungsgleichungen erfüllt sind —, so dass die Gleichung die Form annimmt

$$du + Y_3 dx_3 + Y_4 dx_4 + \cdots + Y_p dx_p = 0,$$

in welcher $Y_3, Y_4, \ldots, Y_p$ nunmehr Functionen von $u, x_3, x_4, \ldots, x_p$ sind.

Zweitens möge nun der nämliche Process bezüglich u und x_3 als der anfänglich betrachteten Veränderlichen wiederholt werden. Wenn dann

$$v = v(u, x_3, x_4, \ldots, x_p)$$

die neue Variable ist, so wird die Gleichung analog

$$dv + Z_4 dx_4 + \cdots + Z_p dx_p = 0$$

und so fort für die verschiedenen aufeinanderfolgenden Schritte, deren Anzahl nicht grösser als $p - 1$ sein kann. Sollten in irgend einem Stadium die Coefficienten der transformirten Gleichung sämmtlich frei von irgend einer Variablen sein, so kann man die Gleichung zu einer exacten Differentialgleichung machen, indem man sie durch diejenigen Factoren des Coefficienten des Differentials jener Variablen dividirt, welche dieselbe nicht enthalten, so dass dann eine einzige Integration zu dem Theile des gesuchten Integrals führt, welcher von dieser Variablen abhängt.

§ 13.

Wir können aber auch wie folgt verfahren: Bekanntlich wird der Ausdruck

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p$$

nach Multiplikation mit einem gewissen Factor μ ein exactes Differential $d\varphi$. Wenn daher dieser Factor gefunden werden kann, so wird die gesuchte Lösung nach der einzigen Integration, welche erforderlich ist, um

$$\varphi = \int \mu (X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p) = \text{const.}$$

auszuwerthen, erhalten.

Es ist

$$\mu X_r = \frac{\partial \varphi}{\partial x_r},$$

so dass wir, wenn wir beiderseits das vollständige Differential nehmen, erhalten:

$$d\mu \,.\, X_r + \mu \sum_{s=1}^{s=p} \frac{\partial X_r}{\partial x_s} dx_s = \sum_{s=1}^{s=p} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_r \partial x_s} dx_s.$$

Rechterhand aber ist:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_r \partial x_s} = \mu \frac{\partial X_s}{\partial x_r} + X_s \frac{\partial \mu}{\partial x_r}$$

für alle Indices s; daher:

$$d\mu \,.\, X_r + \mu \sum_{s=1}^{s=p} \frac{\partial X_r}{\partial x_s} dx_s = \mu \sum_{s=1}^{s=p} \frac{\partial X_s}{\partial x_r} dx_s + \frac{\partial \mu}{\partial x_r} \sum_{s=1}^{s=p} X_s dx_s$$

oder:

$$\frac{d\mu}{\mu} X_r + \sum_{s=1}^{s=p} a_{r,s} dx_s = \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial x_r} d\varphi.$$

Die vollständige Variation von φ aber ist gleich Null, sobald die Variablen durch die gegebene Differentialgleichung verbunden sind, so dass die vorstehende Gleichung übergeht in

$$(11) \qquad -\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{X_r}\{a_{r,1}dx_1 + a_{r,2}dx_2 + \cdots + a_{r,p}dx_p\},$$

worin rechterhand das Glied mit dx_r fehlt. Diese Gleichung gilt zufolge der Relation $d\varphi = 0$ oder, was dasselbe ist, zufolge der gegebenen Differentialgleichung. Die linke Seite ist ein vollkommenes Differential und daher ist auch die rechte Seite ein vollkommenes Differential, welches der Beziehung $d\varphi = 0$ unterworfen ist.

Da r irgend eine der Grössen $1, 2, 3, \ldots, p$ sein kann, so haben wir die Reihe von Gleichungen:

$$(12) \quad \begin{cases} -\dfrac{d\mu}{\mu} = \dfrac{1}{X_1}\{0\,.\,dx_1 + a_{1,2}dx_2 + a_{1,3}dx_3 + \cdots + a_{1,p}dx_p\} \\ \qquad\; = \dfrac{1}{X_2}\{a_{2,1}dx_1 + 0\,.\,dx_2 + a_{2,3}dx_3 + \cdots + a_{2,p}dx_p\} \\ \qquad\; = \dfrac{1}{X_3}\{a_{3,1}dx_1 + a_{3,2}dx_2 + 0\,.\,dx_3 + \cdots + a_{3,p}dx_p\} \\ \qquad\; \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \qquad\; = \dfrac{1}{X_p}\{a_{p,1}dx_1 + a_{p,2}dx_2 + a_{p,3}dx_3 + \cdots + 0\,.\,dx_p\}. \end{cases}$$

Man kann leicht verificiren, dass alle Ausdrücke für $-\frac{d\mu}{\mu}$ in diesem Gleichungssystem äquivalent sind, mit Berücksichtigung der Differentialgleichung selbst und der Bedingungen (7), welche durch die Coefficienten jener Gleichung befriedigt werden.

§ 14.

Obwohl die Brüche in (12) unter einander gleich und zwar gleich $-d\log\mu$ sind zufolge der Differentialgleichung, kommt es doch oft vor, dass keiner der Brüche in der dort gegebenen Form ein exactes Differential ist. Wenn irgend einer derselben in der Form, in welcher er erscheint, ein exactes Differential ist, so ist der Werth von μ unmittelbar ableitbar. Verschwinden z. B. alle Grössen a in dem Zähler irgend eines Bruches — wenn z. B. X_1 eine Function von x_1 allein ist und kein anderer Coefficient X x_1 enthält —, so können wir $\mu = 1$ nehmen und die ursprüngliche Gleichung ist eine exacte Gleichung.

Andererseits wird jeder Werth von μ, welcher diese Gleichungen befriedigt, für unsern Zweck ausreichen; und je einfacher dieser Werth

ist, um so leichter wird im Allgemeinen die nachfolgende Integration für φ sein. Nun haben wir aus (12)

$$-\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\sum\limits_{r=1}^{p}\sum\limits_{s=1}^{p} Y_r a_{r,s} dx_s}{\sum\limits_{r=1}^{p} Y_r X_r},$$

was immer die Grössen Y_r sein mögen, und es kommt in der Praxis oft vor, dass diese Combination der gleichen Brüche zu einem vollständigen Differential führt, mittels passend gewählter Grössen Y. Dies ist z. B. insbesondere der Fall, wenn X_r eine Function von x_r und ferner symmetrisch ist in Bezug auf alle andern Variablen.

Ferner ist der Quotient zweier Werthe von μ eine Lösung der Differentialgleichung (§ 4). Denn sind μ und μ' diese Werthe, so haben wir

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{d\mu'}{\mu'}$$

oder $\frac{\mu'}{\mu}$ ist constant, ein Resultat, welches sich durch Einführung der Bedingung $d\varphi = 0$ oder $\varphi =$ const. ergiebt. Hiernach sind $\frac{\mu'}{\mu}$ und φ gleichzeitig constant und somit*) giebt es zwischen ihnen irgend eine Functionalbeziehung, welche dargestellt werden kann in der Form $\frac{\mu'}{\mu}=f(\varphi)$. Da aber φ eine Lösung ist, so ist nach § 3 auch $f(\varphi)$ eine solche; somit ist auch $\frac{\mu'}{\mu}$ eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.

Wenn daher aus (12) zwei Werthe von μ erhalten werden können, deren Quotient nicht an sich constant ist, so kann man eine Lösung (und somit alle Lösungen) finden, indem man diesen Quotienten einer Constanten gleich setzt.

Von diesem Standpunkte aus können wir die frühere Folgerung (§ 4)

---

*) Denn da $\frac{\mu'}{\mu}$ und φ Functionen der Variablen sind, so erhalten wir durch Elimination einer dieser Variablen z. B. von x_1 aus den beiden diese Functionen ausdrückenden Gleichungen ein Resultat von der Form:

$$\frac{\mu'}{\mu}=f(\varphi, x_2, \ldots, x_p).$$

Da $\varphi =$ const. die Relation $\frac{\mu'}{\mu}=$ const. nach sich zieht, so führt das Integral zu einer neuen Relation zwischen $x_2, \ldots, x_p$, welche von der ersten verschieden ist. Da dies nicht möglich ist, so muss sie als Relation zwischen den Veränderlichen verschwinden und man erhält daher das im Texte angegebene Resultat.

bezüglich der allgemeinen Form von μ und ferner das Resultat ableiten, dass, wenn man aus (12) drei Werthe von μ erhalten kann, zwischen denselben eine homogene Relation besteht.

§ 15.

Beispiel 1. Für die Gleichung

$$z(y+z)dx + z(u-x)dy + y(x-u)dz + y(y+z)du = 0$$

sind die erforderlichen Bedingungen erfüllt, denn es ist:

$$a_{1,2} = 2z, \quad a_{1,3} = 2z, \quad a_{1,4} = 0$$
$$a_{3,4} = -2y, \quad a_{2,4} = -2y, \quad a_{2,3} = 2(u-x).$$

Nimmt man den ersten der Brüche für $-\frac{d\mu}{\mu}$, so hat man:

$$-\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2z\,dy + 2z\,dz}{z(y+z)} = 2\,\frac{dy+dz}{y+z},$$

daher:

$$\mu = (y+z)^{-2}.$$

Der nämliche Werth wird durch den vierten der Brüche und ebenso durch eine Combination des zweiten und dritten geliefert. Alsdann ist der Ausdruck

$$(y+z)^{-2}\{z(y+z)dx + z(u-x)dy + y(x-u)dz + y(y+z)du\}$$

ein exactes Differential, und eine Lösung der ursprünglichen Gleichung ist gegeben durch:

$$\frac{xz+uy}{y+z} = \text{const.}$$

Beispiel 2. Die erforderlichen Bedingungen sind ebenfalls sämmtlich befriedigt für die Gleichung

$$(y+z)(z+u)(u+y)dx + \text{drei analogen Gliedern} = 0.$$

Nimmt man den ersten und zweiten der vier Brüche, so erhält man:

$$-\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2(z+u)(y-x)dy + 2(y+u)(z-x)dz + 2(y+z)(u-x)du}{(y+z)(z+u)(u+y)}$$
$$= \frac{2(z+u)(x-y)dx + 2(x+u)(z-y)dz + 2(x+z)(u-y)du}{(z+x)(x+u)(u+z)}$$
$$= \frac{\text{zweiter Zähler} - \text{erster Zähler}}{\text{zweiter Nenner} - \text{erster Nenner}}.$$

Hebt man in diesem Bruche aus Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Factor $(u+z)(x-y)$ weg, so erhält man:

$$-\frac{d\mu}{\mu} = 2\,\frac{dx+dy+dz+du}{x+y+z+u},$$

daher:

$$\mu = (x + y + z + u)^{-2}.$$

Man findet nun leicht die Lösung, welche ist:

$$\frac{xyz + yzu + zux + uxy}{x + y + z + u} = \text{const.}$$

Die Ableitung der Lösung nach der Methode des § 12 ist ziemlich lang.

Beispiel 3. Im Falle einer Gleichung mit drei Variablen von der Form

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

erhält man

$$a_{2,3} = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} = X$$

$$a_{3,1} = \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} = Y$$

$$a_{1,2} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Z$$

und die Integrabilitätsbedingung ist:

$$PX + QY + RZ = 0.$$

Die Gleichungen für den Integrabilitätsfactor sind:

$$-\frac{d\mu}{\mu} = \frac{Zdy - Ydz}{P} = \frac{Xdz - Zdx}{Q} = \frac{Ydx - Xdy}{R}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} dx, & dy, & dz \\ X, & Y, & Z \\ a, & b, & c \end{vmatrix}}{aP + bQ + cR},$$

wo a, b, c irgend welche Grössen sind.

Ist insbesondere

$$P = x^2y - y^3 - y^2z, \quad Q = xy^2 - x^3 - x^2z, \quad R = xy^2 + x^2y,$$

so ist:

$$X = -2x(x + y), \quad Y = 2y(x + y), \quad Z = 2(x - y)(2x + 2y + z).$$

Aus dem dritten der Brüche folgt:

$$-\frac{d\mu}{\mu} = \frac{(2ydx + 2xdy)(x + y)}{xy^2 + x^2y} = 2\,\frac{ydx + xdy}{xy},$$

daher:

$$\mu = \frac{1}{x^2y^2}.$$

Nimmt man andrerseits

$$-\frac{d\mu'}{\mu'} = \frac{Zdy - Ydz - (Xdz - Zdx)}{P - Q}$$
$$= \frac{Z(dy + dx) - (X + Y)dz}{P - Q}$$
$$= \frac{2(x-y)\{(2x+2y+z)(dx+dy) + (x+y)dz\}}{(x-y)(x+y)(x+y+z)},$$

so ist auch dieser neue Bruch nach Weghebung des Factors $x - y$ ein exactes Differential, daher

$$\mu' = (x+y)^{-2}(x+y+z)^{-2}.$$

Da wir somit zwei integrirende Factoren haben, welche nicht an sich ein constantes Verhältniss ergeben, so wird eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung dargestellt durch

$$\frac{\mu}{\mu'} = \text{const.},$$

oder es ist, wenn man die Quadratwurzel zieht,

$$\frac{(x+y)(x+y+z)}{xy} = \text{const.}$$

die gewünschte Lösung.

§ 16.

Für die Gleichung mit drei Variablen wendet Bertrand das folgende Verfahren an*). Unter Beibehaltung der Bezeichnungen in § 15 bildet er die Hülfsgleichungen

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

und findet zwei unabhängige Integrale derselben, etwa

$$\alpha = \varphi_1(x, y, z), \quad \beta = \varphi_2(x, y, z),$$

so dass

$$X\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + Y\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + Z\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = 0$$
$$X\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + Y\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + Z\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = 0$$

ist. Da aber

$$\mu P = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \mu R = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

(wo $\varphi =$ const. die Lösung der Gleichung ist), so giebt die Integrabilitätsbedingung:

$$X\frac{\partial\varphi}{\partial x} + Y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + Z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

Eliminirt man X, Y, Z, so erhält man

*) Comptes Rendus, Bd. 83 (1876) S. 1191–1195.

$$\frac{\partial(\varphi, \varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y, z)} = 0,$$

und daher kann φ als Function von φ_1 und φ_2 dargestellt werden. Hiernach existirt eine gewisse Function f von solcher Beschaffenheit, dass die Lösung der Gleichung ist:

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi = \text{const.},$$

z. B.

$$f(\alpha, \beta) = \text{const.}$$

Daher kann die Gleichung transformirt werden in:

$$Md\alpha + Nd\beta = 0,$$

wo $M : N = \frac{\partial f}{\partial \alpha} : \frac{\partial f}{\partial \beta}$ ist, falls α und β als Variable genommen werden, und jede Lösung der letzten Gleichung ist auch eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.

Man wird bemerken, dass die Hülfsgleichungen identisch verschwinden, wenn die gegebene Gleichung exact ist.

Beispiel. Für das specielle in Beispiel 3 § 15 gegebene Beispiel ist das Hülfssystem nach Abwerfung des Factors 2:

$$\frac{-dx}{x(x+y)} = \frac{dy}{y(x+y)} = \frac{dz}{(x-y)(2x+2y+z)}.$$

Ein Integral wird durch die beiden ersten Brüche in der Form geliefert:

$$xy = \alpha.$$

Aus den Brüchen bilden wir die Relation:

$$\frac{dx+dy}{x+y} = -\frac{dx+dy+dz}{x+y+z}$$

nach Abwerfung des Factors $x - y$, so dass ein zweites (unabhängiges) Integral gegeben ist durch

$$(x+y)(x+y+z) = \beta.$$

Da die Gleichung sich auf die Form

$$Md\alpha + Nd\beta = 0$$

transformiren lässt, so erhalten wir nach Substitution der Werthe für α und β die Gleichungen:

$$My + N(2x + 2y + z) = y(x^2 - y^2 - yz)$$
$$Mx + N(2x + 2y + z) = x(y^2 - x^2 - xz)$$
$$N(x+y) = xy(x+y),$$

welche sämmtlich befriedigt werden durch

$$N = xy = \alpha$$
$$-M = (x+y)(x+y+z) = \beta.$$

Die transformirte Gleichung ist daher

$$\alpha d\beta - \beta d\alpha = 0,$$

und diese hat zum Integral

$$\frac{\beta}{\alpha} = \text{const.},$$

welches, wenn für α und β ihre Werthe gesetzt werden, dasselbe ist, wie das zuvor erhaltene.

Ferner, da $\mu Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\mu R = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ ist, so haben wir:

$$-\mu^2 X = \frac{\partial \mu}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

und analog für die andern, so dass die Hülfsgleichungen in der Form genommen werden können:

$$\frac{dx}{\frac{\partial(\varphi,\mu)}{\partial(y,z)}} = \frac{dy}{\frac{\partial(\varphi,\mu)}{\partial(z,x)}} = \frac{dz}{\frac{\partial(\varphi,\mu)}{\partial(x,y)}}.$$

Diese werden befriedigt durch

$$\mu = \text{const.}$$
$$\varphi = \text{const.},$$

und die Constanten lassen sich ausdrücken durch α und β, sind aber nicht nothwendig diesen gleich. Es folgt daher nicht, dass, wenn zwei unabhängige Lösungen von Bertrand's Hülfssystem erhalten sind, jede derselben als integrirender Factor der ursprünglichen Gleichung genommen werden kann. In der That zeigt eine Vergleichung der beiden Methoden, dass in dem besonderen betrachteten Beispiele

$$\mu = \alpha^2$$
$$\mu' = \beta^2,$$

welches die beiden unabhängigen integrirenden Factoren sind*).

---

*) Vgl. De Morgan: „On the integrating factor of $Pdx + Qdy + Rdz$“, Quart. Journ. vol. II (1858) S. 323—326, wo er zeigt, dass der integrirende Factor der Gleichung genügt:

$$X\frac{\partial \mu}{\partial x} + Y\frac{\partial \mu}{\partial y} + Z\frac{\partial \mu}{\partial z} = 0,$$

die man leicht erhält, wenn man die drei Gleichungen mit $\frac{\partial \mu}{\partial x}$, $\frac{\partial \mu}{\partial y}$, $\frac{\partial \mu}{\partial z}$ resp multiplicirt und dann addirt.

§ 17.

Bertrand's Methode lässt, unter verschiedenem Gesichtspunkte betrachtet, eine Verallgemeinerung auf den Fall einer Gleichung mit mehr als drei Veränderlichen zu.

Die beiden neuen Variablen α und β, welche eingeführt werden, um die gegebene Gleichung in eine zu transformiren, welche nur zwei Variable enthält, sind unabhängige Integrale der partiellen Differentialgleichung

$$a_{2,3}\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+a_{3,1}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+a_{1,2}\frac{\partial\vartheta}{\partial z}=0,$$

und weil die gesuchte Lösung φ ebenfalls ein Integral dieser Gleichung ist, so kann φ als eine gewisse Function von α und β dargestellt werden, so dass die Transformation möglich wird.

Um die Verallgemeinerung anzudeuten, wollen wir die Gleichung

$$X_1dx_1+X_2dx_2+X_3dx_3+X_4dx_4=0$$

betrachten, deren Coefficienten den vier Bedingungsgleichungen von der Form

$$a_{2,3}X_1+a_{3,1}X_2+a_{1,2}X_3=0$$

genügen sollen. Die Grössen $a_{m,n}$ sind von solcher Beschaffenheit, dass sie sowohl der Relation

$$a_{1,4}a_{2,3}+a_{1,3}a_{4,2}+a_{1,2}a_{3,4}=0$$

als auch den Relationen

$$\frac{\partial a_{n,r}}{\partial x_m}+\frac{\partial a_{r,m}}{\partial x_n}+\frac{\partial a_{m,n}}{\partial x_r}=0$$

genügen, welche letzteren sich unmittelbar verificiren lassen.

Es möge nun, wenn dies möglich ist, eine Grösse ϑ den beiden Gleichungen genügen:

$$(A)\qquad\begin{cases}0=a_{2,3}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x_1}+a_{3,1}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x_2}+a_{1,2}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x_3}\\[2ex]0=a_{2,4}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x_1}+a_{4,1}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x_2}\qquad\qquad+a_{1,2}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x_4}\end{cases}$$

und daher auch, infolge der unter den Grössen a bestehenden Relation, den beiden andern Gleichungen

$$(A')\qquad\begin{cases}0=\qquad\qquad a_{3,4}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x_2}+a_{4,2}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x_3}+a_{2,3}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x_4}\\[2ex]0=a_{3,4}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x_1}\qquad\qquad+a_{4,1}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x_3}+a_{1,3}\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x_4},\end{cases}$$

welche letzteren beiden von den beiden vorhergehenden (A) linear

abhängig sind. Nun muss nach der gewöhnlichen Jacobi'schen Theorie jede Grösse ϑ, welche den beiden Gleichungen (A) genügt, auch der Gleichung

$$\left(a_{2,3}\frac{\partial}{\partial x_1}+a_{3,1}\frac{\partial}{\partial x_2}+a_{1,2}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\left(a_{2,4}\frac{\partial}{\partial x_1}+a_{4,1}\frac{\partial}{\partial x_2}+a_{1,2}\frac{\partial}{\partial x_4}\right)\vartheta$$
$$-\left(a_{2,4}\frac{\partial}{\partial x_1}+a_{4,1}\frac{\partial}{\partial x_2}+a_{1,2}\frac{\partial}{\partial x_4}\right)\left(a_{2,3}\frac{\partial}{\partial x_1}+a_{3,1}\frac{\partial}{\partial x_2}+a_{1,2}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\vartheta=0,$$

welches die Bedingung der Coexistenz beider Gleichungen ist, genügen. Diese Gleichung, welche von ϑ befriedigt werden muss, ist in der Form nicht neu; sie wird, wie man leicht zeigen kann, infolge der Gleichungen (A) und (A') und der unter den Grössen $a_{m,n}$ bestehenden Relationen identisch befriedigt. Hieraus folgt, dass die beiden Gleichungen (A), die augenscheinlich von einander unabhängig sind, die beiden einzigen linear unabhängigen Gleichungen sind, welche von ϑ befriedigt werden müssen, und dass dieselben somit ein vollständiges Jacobi'sches System bilden*).

Da hier nun vier Veränderlichen, von denen ϑ eine Function sein soll, vorhanden sind, und da das vollständige Jacobi'sche System aus zwei Gleichungen besteht, so folgt (vgl. weiter unten § 38), dass es zwei ($= 4 - 2$) unabhängige simultane Lösungen der Gleichungen dieses Systems giebt. Es seien α und β zwei solche Lösungen; dieselben befriedigen jede, für ϑ substituirt, die vier Gleichungen (A) und (A') und jede andere Lösung lässt sich ausdrücken durch α und β allein.

Nun bestehen aber Relationen

$$0 = a_{m,n} X_r + a_{n,r} X_m + a_{r,m} X_n\,,$$

und wenn die der Differentialgleichung äquivalente Integralgleichung

$$\psi = \text{const.}$$

ist, so ist für jeden Index

$$\mu X_s = \frac{\partial \psi}{\partial x_s},$$

so dass man, wenn man substituirt und mit μ multiplicirt, für alle Combinationen der Indices erhält:

$$0 = a_{m,n}\frac{\partial \psi}{\partial x_r} + a_{n,r}\frac{\partial \psi}{\partial x_m} + a_{r,m}\frac{\partial \psi}{\partial x_n}\,.$$

Hieraus folgt, dass ψ ebenfalls eine Lösung der vier Gleichungen (A) und (A') ist, und daher muss eine Function f von der Beschaffenheit existiren, dass

$$\psi = f(\alpha,\ \beta)$$

---

*) Vergl. Lehrbuch § 226; sowie weiter unten § 38 u. ff.

ist. Die der Differentialgleichung äquivalente Integralgleichung wird daher

$$f(\alpha, \beta) = \text{const.},$$

so dass die Differentialgleichung auf die Form gebracht werden kann:

$$M d\alpha + N d\beta = 0,$$

worin

$$M : N = \frac{\partial f}{\partial \alpha} : \frac{\partial f}{\partial \beta}.$$

Wenn dann die Grössen α und β als neue Variable genommen werden, so kann die Differentialgleichung transformirt werden in

$$M d\alpha + N d\beta = 0,$$

wo M und N Functionen von α und β allein sind; das Integral dieser neuen Form ergiebt die gewünschte Lösung. Hiernach erhalten wir den **Satz:**

Wenn die Differentialgleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = 0$$

allen Bedingungen genügt, welche stattfinden müssen, damit sie ein einziges äquivalentes Integral besitzt, und wenn zwei unabhängige Integrale der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 0 &= a_{2,3} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + a_{3,1} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} + a_{1,2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_3} \\ 0 &= a_{2,4} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + a_{4,1} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} + a_{1,2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_4} \end{aligned}\right\} {}^{*)}$$

dargestellt werden durch

$$\alpha = \alpha(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad \beta = \beta(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

so lässt sich die Gleichung, wenn α und β als unabhängige Veränderliche eingeführt werden, darstellen in der Form

$$M d\alpha + N d\beta = 0,$$

wo M und N Functionen von α und β allein sind, und das Integral der neuen Gleichung führt zu der Lösung der ursprünglichen Gleichung.

Und der entsprechende **Satz** für eine Gleichung mit p Veränderlichen lautet:

Wenn die Differentialgleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p = 0$$

allen Bedingungen genügt, welche erfüllt sein müssen, da-

---

*) Irgend zwei der vier Gleichungen (A) und (A') können als die das vollständige System bildenden Gleichungen benutzt werden.

mit sie ein einziges äquivalentes Integral besitzt, und wenn zwei unabhängige Integrale der Gleichungen

$$0 = a_{2,m} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + a_{m,1} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} + a_{1,2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_m}$$

(wo $m = 3, 4, \ldots, p$) dargestellt werden durch

$$\alpha = \alpha(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p)$$
$$\beta = \beta(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p),$$

so lässt sich die Gleichung, falls α und β als unabhängige Veränderliche eingeführt werden, darstellen in der Form

$$M d\alpha + N d\beta = 0,$$

wo M und N Functionen von α und β allein sind, und das Integral der neuen Gleichung führt zu der Lösung der ursprünglichen Gleichung.

Beispiel. Als Beispiel wollen wir Beispiel 1 § 15 betrachten, indem wir uns x, y, z, u durch x_1, x_2, x_3, x_4 ersetzt denken. Die beiden Gleichungen, welche zur Bestimmung von α und β dienen, sind:

$$0 = x_3 \frac{\partial \vartheta}{\partial x_4} - x_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1}$$

$$0 = (x_4 - x_1) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial \vartheta}{\partial x_3} = \Delta \vartheta \quad \text{(etwa)}.$$

Die Hülfsgleichungen für die Integration der ersten sind:

$$\frac{dx_1}{-x_2} = \frac{dx_2}{0} = \frac{dx_3}{0} = \frac{dx_4}{x_3},$$

und hiervon können drei unabhängige Integrale in der Form geschrieben werden:

$$\vartheta_1 = x_2,$$
$$\vartheta_2 = x_3,$$
$$\vartheta_3 = x_2 x_4 + x_1 x_3.$$

Jede Lösung der ersten Gleichung kann als Function dieser dargestellt werden, z. B.

$$\vartheta = F(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3),$$

und es sind nunmehr solche Formen der Function F zu bestimmen, dass der zweiten Gleichung genügt wird. Nun ist

$$\Delta \vartheta_1 = -\vartheta_2, \qquad \Delta \vartheta_2 = \vartheta_2, \qquad \Delta \vartheta_3 = 0,$$

daher:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \vartheta_1} \Delta \vartheta_1 + \frac{\partial F}{\partial \vartheta_2} \Delta \vartheta_2 + \frac{\partial F}{\partial \vartheta_3} \Delta \vartheta_3$$
$$= -\vartheta_2 \frac{\partial F}{\partial \vartheta_1} + \vartheta_2 \frac{\partial F}{\partial \vartheta_2},$$

oder nach Abwerfung des Factors ϑ_2:

$$0 = -\frac{\partial F}{\partial \vartheta_1} + \frac{\partial F}{\partial \vartheta_2}.$$

Die Hülfsgleichungen für die Integration dieser Gleichung sind:

$$\frac{d\vartheta_1}{-1} = \frac{d\vartheta_2}{1} = \frac{d\vartheta_3}{0},$$

und die beiden erforderlichen Integrale hiervon:

$$\alpha = \vartheta_1 + \vartheta_2$$
$$\beta = \vartheta_3.$$

Somit kann nach der Theorie derartiger Gleichungen jede gleichzeitige Lösung der die Function ϑ bestimmenden Gleichungen ausgedrückt werden als Function von

$$\alpha = \vartheta_1 + \vartheta_2 = x_2 + x_3$$
$$\beta = \vartheta_3 \qquad = x_2 x_4 + x_1 x_3.$$

Nehmen wir nun, um die Integration zu Ende zu führen,

$$Md\alpha + Nd\beta = x_3(x_2 + x_3)dx_1 + x_3(x_4 - x_1)dx_2 + x_2(x_1 - x_4)dx_3 + x_2(x_2 + x_3)dx_4,$$

so erhalten wir:

$$Nx_3 = x_3(x_2 + x_3)$$
$$M + Nx_4 = x_3(x_4 - x_1)$$
$$M + Nx_1 = x_2(x_1 - x_4)$$
$$Nx_2 = x_2(x_2 + x_3)$$

und diese werden sämmtlich befriedigt durch

$$N = \alpha, \qquad M = -\beta.$$

Hiernach wird die Differentialgleichung

$$\alpha d\beta - \beta d\alpha = 0,$$

deren Integral ist:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \text{const.}$$

somit wie vorher:

$$\frac{x_2 x_4 + x_1 x_3}{x_2 + x_3} = \text{const.}$$

Es mag bemerkt werden, dass, falls zwei der vier Gleichungen, welche alle durch ϑ befriedigt werden, identisch sind, dieselben nicht als diejenigen Gleichungen genommen werden können, mit deren Hülfe α und β gefunden werden sollen.

In der Praxis wird man finden (der Grund hierfür ist aus der

Theorie der Differentialgleichungen ersichtlich), dass das bei dem besonderen Beispiel für die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen angewandte Verfahren von allgemeiner Anwendung ist.

§ 18.

Es giebt eine andere Methode*) zur Bestimmung des integrirenden Factors μ, welche diese Grösse als eine Lösung der simultanen partiellen Differentialgleichungen, denen sie genügt, behandelt. Die allgemeine typische Gleichung ist (§ 5):

$$X_n \frac{\partial \mu}{\partial x_m} - X_m \frac{\partial \mu}{\partial x_n} = \mu a_{m,n},$$

und diese muss gelten für alle Combinationen der Indices m, n. Nun wird aber mit Rücksicht auf die von den Coefficienten X zu befriedigenden Bedingungen eine Reihe von dem ganzen Systeme äquivalenten, und, soweit μ in Betracht kommt, linear von einander unabhängigen Gleichungen gebildet durch

$$X_1 \frac{\partial \mu}{\partial x_m} - X_m \frac{\partial \mu}{\partial x_1} = \mu a_{m,1},$$

wo $m = 2, 3, \ldots, p$ ist. Nimmt man $\mu = e^z$ und bezeichnet man $\frac{\partial z}{\partial x_r}$ mit p_r, so erhält man das irreductible simultane System in der Form

$$X_1 p_m - X_m p_1 + a_{1,m} = 0. \tag{13}$$

Die Jacobi'schen Bedingungen der Coexistenz sind infolge der Relationen (7) erfüllt und somit wird μ bestimmt sein durch jede gemeinsame Lösung des Systems (13). Wenn wir jedoch eine gemeinsame Lösung des Systems mit einer oder mehr willkürlichen Constanten erhalten, so wird es im Allgemeinen möglich sein, aus dieser Lösung zwei verschiedene Werthe des integrirenden Factors abzuleiten, und aus diesen kann dann (§ 4) eine Lösung der ursprünglichen Gleichung erhalten werden.

Nimmt man das specielle in Beispiel 3 § 15 discutirte Beispiel und behält man als die beiden linear unabhängigen Gleichungen, welche z bestimmen, die folgenden bei:

$$X_1 p_3 - X_3 p_1 + a_{1,3} = 0$$
$$X_2 p_3 - X_3 p_2 + a_{2,3} = 0,$$

*) Collet, Annales de l'Éc. Norm. Sup. 1[re] Série VII (1870), p. 59—88.

so erhält man nach Substitution der Werthe für X_1, X_2, X_3, $a_{1,3}$, $a_{2,3}$:

$$F_1 = (x_1^2 - x_2^2 - x_2 x_3)p_3 - x_1(x_1 + x_2)p_1 - 2(x_1 + x_2) = 0$$

$$F_2 = (x_2^2 - x_1^2 - x_1 x_3)p_3 - x_2(x_1 + x_2)p_2 - 2(x_1 + x_2) = 0,$$

nachdem man respective die Factoren x_2 und x_1 abgeworfen hat.

Die Hülfsgleichungen für die Integration von $F_1 = 0$ nach dem Jacobi'schen Verfahren sind:

$$\frac{dx_1}{x_1(x_1 + x_2)} = \frac{dx_2}{0} = \frac{dx_3}{-(x_1^2 - x_2^2 - x_2 x_3)} = \cdots = \frac{dp_3}{-x_2 p_3}.$$

Aus den drei ersten Brüchen kann man die folgende, ihnen an Werth gleiche Combination bilden:

$$\frac{dx_1 + dx_2 + dx_3}{x_2(x_1 + x_2 + x_3)},$$

so dass ein Integral des Systems gegeben ist durch

$$F_3 = p_3(x_1 + x_2 + x_3) = a,$$

wo a eine willkürliche Constante ist. Man verificirt leicht, dass

$$(F_1, F_3) = 0, \quad (F_2, F_3) = 0$$

und daher ist $F_3 = a$ die gemeinschaftliche Lösung.

Löst man die drei Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = a$ nach p_1, p_2, p_3 auf, so erhält man:

$$x_1 p_1 + 2 = a\frac{x_1^2 - x_2^2 - x_2 x_3}{(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2)} = a\left\{\frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3} + \frac{x_1}{x_1 + x_2} - 1\right\}$$

$$x_2 p_2 + 2 = a\frac{x_2^2 - x_1^2 - x_1 x_3}{(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2)} = a\left\{\frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_1 + x_2} - 1\right\}$$

$$p_3 \quad = a\frac{1}{x_1 + x_2 + x_3},$$

und hieraus

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3$$

$$= -(a + 2)\left(\frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2}\right) + a\left(\frac{dx_1 + dx_2 + dx_3}{x_1 + x_2 + x_3} + \frac{dx_1 + dx_2}{x_1 + x_2}\right),$$

daher:

$$\mu = e^z = c\frac{\{(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2)\}^a}{(x_1 x_2)^{a+2}},$$

wo c eine willkürliche Constante ist.

Ein specieller Werth von μ, etwa μ', der durch $a = 0$ entsteht, ist

$$\mu' = \frac{c}{x_1^2 x_2^2},$$

und daher ist eine Lösung der ursprünglichen Gleichung:

$$\frac{\mu}{\mu'} = \text{const.},$$

und diese lässt sich sofort auf die frühere Form bringen:

$$\frac{(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = \text{const.}$$

§ 19.

Eine dem Euler'schen Verfahren (§ 12) etwas ähnliche Methode rührt von Natani her*). Dieselbe wird zur Genüge klar werden, wenn wir uns auf die Form beschränken:

$$(A) \qquad Xdx + Ydy + Zdz + Udu = 0,$$

wobei die Integrabilitätsbedingungen als erfüllt vorausgesetzt werden, so dass das äquivalente Integral aus einer einzigen Gleichung besteht.

Betrachtet man zunächst z und u als constant, so erhält man ein Integral von

$$Xdx + Ydy = 0$$

in der Form

$$\psi(x, y, z, u) = \text{const.}$$

und die äquivalente Integralgleichung der ursprünglichen Gleichung ist alsdann von der Form

$$f(\psi, z, u) = a, \text{**)}$$

oder etwa

$$(\alpha) \qquad \psi = \varphi(z, u, a),$$

wo φ nicht x oder y explicit enthält und daher durch keine specielle Annahme über diese Veränderlichen in der Form geändert wird. Setzt man dann $x = 0$ und bezeichnet man mit y_1 den entsprechenden Werth von y, so erhält man:

$$(\beta) \qquad \psi(x, y, z, u) = \psi(0, y_1, z, u),$$

und sodann ist

$$(\gamma) \qquad \psi(0, y_1, z, u) = \varphi(z, u, a)$$

das äquivalente Integral von

$$(B) \qquad Y_1 dy_1 + Z_1 dz + U_1 du = 0,$$

wo Y_1, Z_1, U_1 die Werthe von Y, Z, U für $y = y_1$, $x = 0$ sind.

---

*) „Ueber totale und partielle Differentialgleichungen", Crelle's J. Bd. 58 (1860) S. 301—328, § 2.

**) An dieser Stelle wird bei dem Natani'schen Verfahren stillschweigend die Annahme der Integrabilität gemacht.

Betrachtet man zweitens u als constant, so erhält man ein Integral von

$$Y_1 dy_1 + Z_1 dz = 0$$

in der Form:

$$\chi(y_1, z, u) = \text{const.},$$

und das äquivalente Integral von (B) ist von der Form:

$$F(\chi, u) = \text{const.}$$

oder etwa

$$(\delta) \qquad \chi = \vartheta(u, b),$$

wo ϑ nicht y_1 oder z explicit enthält und daher durch keine specielle Annahme über diese Variablen in der Form geändert wird. Setzt man dann $y_1 = 0$ und bezeichnet man mit z_2 den entsprechenden Werth von z, so erhält man:

$$(\varepsilon) \qquad \chi(y_1, z, u) = \chi(0, z_2, u)$$

und dann ist

$$(\zeta) \qquad \chi(0, z_2, u) = \vartheta(u, b)$$

das äquivalente Integral von

$$(C) \qquad Z_2 dz_2 + U_2 du = 0,$$

wo Z_2, U_2 die Werthe von Z_1, U_1 für $z = z_2, y_1 = 0$, d. h. die Werthe von Z, U für $z = z_2$, $y = 0$, $x = 0$ sind.

Nun giebt (C), wenn integrirt, z_2 als Function von u. Wird dieser Werth von z_2 in (ε) substituirt, so wird die rechte Seite $\vartheta(u, b)$ und daher verwandelt sich die Gleichung in (δ), welche den Werth von y_1 als eine Function von z und u giebt. Wird dieser Werth von y_1 in (β) substituirt, so wird die rechte Seite $\varphi(z, u, \text{const.})$ und somit verwandelt sich die Gleichung in (α), d. h. in die Gleichung, welche das der Gleichung (A) entsprechende Integral darstellt, das somit erhalten ist.

Alle hierbei gemachten Schritte sind wirklich möglich mit Rücksicht darauf, dass die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind; und die Functionen ψ und χ sind erhalten aus der Integration besonderer (vereinfachter) binomischer Formen von (A) und (B).

Offenbar liegt der Unterschied zwischen der Natani'schen und der Euler'schen Methode in der Einführung der Postulate, welche zu Gleichungen wie (β) und (ε) führen, und darin, dass das Verfahren auf Gleichungen mit beliebig vielen Veränderlichen anwendbar ist. Und wenn es in besonderen Beispielen sich als nicht zweckmässig erweisen sollte, einer Variablen den Werth Null beizulegen,

um eine Gleichung wie (B) aus (A) oder (C) aus (B) abzuleiten, so kann man der Variablen zu diesem Zwecke einen von Null verschiedenen constanten Werth geben; die einzige Folge hiervon würde sein, dass die Coefficienten im allgemeinen Falle weniger einfach sein würden, als wenn man derselben den normalen Werth Null beigelegt hätte.

Beispiel 1. Als einfaches Beispiel betrachten wir (vergl. § 15, Beisp. 1):

$$z(y+z)dx + z(u-x)dy + y(z-u)dz + y(y+z)du = 0.$$

Nehmen wir zunächst u und z constant, so ist:

$$\psi(x, y, z, u) = \frac{y+z}{u-x},$$

daher:

$$\psi(0, y_1, z, u) = \frac{y_1+z}{u} = \frac{y+z}{u-x}.$$

Die nächste Gleichung ist:

$$zudy_1 - y_1udz = 0,$$

daher:

$$\chi(y_1, z, u) = \frac{z}{y_1},$$

und somit:

$$\chi(1, z_2, u) = z_2 = \frac{z}{y_1}.$$

Die letzte Gleichung ist:

$$-udz_2 + (1+z_2)du = 0,$$

daher:

$$\frac{1+z_2}{u} = \text{const.}$$

oder:

$$z_2 = cu - 1.$$

Hieraus

$$y_1 = \frac{z}{z_2} = \frac{z}{cu-1}$$

und daher:

$$\frac{y+z}{u-x} = \frac{y_1+z}{u} = \frac{cz}{cu-1},$$

somit:

$$\frac{uy+xz}{y+z} = \frac{1}{c} = \text{const.},$$

übereinstimmend mit dem früheren Resultat.

Beispiel 2. Um eine directe Vergleichung zwischen den beiden Methoden, der Euler'schen und Natani'schen, zu haben, wenden wir sie beide auf die Gleichung an:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

die wir als integrabel voraussetzen.

Euler setzt

$$Xdx + Ydy = Md\psi,$$

wo ψ eine Function von x, y, z ist, die zunächst unter der Annahme bestimmt ist, dass z constant ist; und seine zweite Gleichung ist dann von der Form:

$$d\psi + \left(\frac{Z}{M} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dz = 0,$$

wo $\frac{Z}{M} - \frac{\partial \psi}{\partial z}$ eine Function von z und ψ allein ist, infolge der Integrabilitätsbedingung. Das Integral der Differentialgleichung ist dann von der Form

$$\psi = f(z, c),$$

wo c eine willkürliche Constante ist.

Nun sei nach Natani

$$\psi(x, y, z) = \psi(0, y_1, z) = \Psi(y_1, z).$$

Ist M_1 der Werth von M für $x = 0$, $y = y_1$, so folgt, falls $\vartheta(z, \psi)$ der Werth von $\frac{Z}{M} - \frac{\partial \psi}{\partial z}$ ist, dass $\vartheta(z, \Psi)$ den Werth von $\frac{Z_1}{M_1} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}$ darstellt, da x und y nicht explicit vorkommen. Da aber $\psi = \Psi$, so ist $\vartheta(z, \psi) = \vartheta(z, \Psi)$ und daher:

$$\frac{Z}{M} - \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{Z_1}{M_1} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Somit $d\psi = d\Psi$. Hiernach wird Euler's zweite Gleichung:

$$d\Psi + \left(\frac{Z_1}{M_1} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) dz = 0,$$

d. h.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_1} dy_1 + \frac{Z_1}{M_1} dz = 0.$$

Ferner haben wir:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{Y}{M}$$

und daher:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_1} = \frac{Y_1}{M_1};$$

somit wird Euler's zweite Gleichung:

$$Y_1 dy_1 + Z_1 dz = 0,$$

d. h. sie wird mit Natani's zweiter Gleichung identisch. Da nun das Integral von Euler's zweiter Gleichung (und daher von der ursprünglichen Gleichung)

$$\psi = f(z, c)$$

ist, so ist das Integral von Natani's zweiter Gleichung

$$\Psi = f(z, c)$$

und daher ist das Integral der ursprünglichen Gleichung nach der Natani'schen Methode

$$\psi(x, y, z) = \Psi(y_1, z) = f(z, c).$$

§ 20.

Dubois-Reymond*) hat ebenfalls eine Methode angegeben, um ein der Gleichung $\Omega = Xdx + Ydy + Zdz = 0$ äquivalentes Integral zu erhalten. Bei der Darlegung dieser Methode tritt die Bedingung der Integrabilität nirgends als wesentlich auf; mag die Gleichung $\Omega = 0$ integrabel sein oder nicht, die Methode führt zu einer einzigen Gleichung, welche, wie behauptet wird, von der geeigneten Form ist, sobald die Gleichung integrabel ist.

Die Methode besteht, geometrisch ausgedrückt, in folgendem: Welches auch immer der durch die Gleichung $\Omega = 0$ dargestellte geometrische Ort sein möge, wir können von einem Punkte P_0, dessen Coordinaten x_0, y_0, z_0 sind, längs desjenigen Theiles des Ortes, welcher auf einer willkürlichen Fläche

$$a = \chi(x, y, z)$$

liegt, zu einem andern Punkte P_1 übergehen, dessen Coordinaten x_1, y_1, z_1 sind. Von diesem Punkte P_1 aus bewegen wir uns längs desjenigen Theiles des Ortes, welcher auf einer andern willkürlichen Fläche

$$b = \chi_1(x, y, z)$$

liegt, zu einem andern Punkte P, dessen Coordinaten x, y, z sind.

Nun kann man die Gleichungen

$$\Omega = 0, \quad a = \chi, \quad 0 = d\chi$$

benutzen, um eine Differentialgleichung erster Ordnung mit nur zwei Variablen herzustellen; diese wird ein Integral haben, etwa

$$f(x, y, z, a) = c_1,$$

so dass wir haben:

$$\begin{aligned} \chi(x_0, y_0, z_0) \quad &= a = \chi(x_1, y_1, z_1) \\ f(x_0, y_0, z_0, a) &= c_1 = f(x_1, y_1, z_1, a). \end{aligned}$$

*) „Ueber die Integration linearer totaler Differentialgleichungen, denen durch ein Integral Genüge geschieht", Crelle's Journ. Bd. 70 (1869), S. 299—313.

Analog kann man die Gleichungen

$$\Omega = 0, \quad b = \chi_1, \quad 0 = d\chi_1$$

benutzen, um eine Gleichung erster Ordnung mit nur zwei Variablen herzustellen, welche ein Integral besitzt von der Form:

$$g(x, y, z, b) = c_2,$$

so dass man hat:

$$\chi_1(x_1, y_1, z_1) = b = \chi_1(x, y, z)$$

$$g(x_1, y_1, z_1, b) = c_2 = g(x, y, z, b).$$

Aus diesen acht Gleichungen kann man die sieben Grössen x_1, y_1, z_1, a, b, c_1, c_2 eliminiren und das Resultat wird sein:

$$\Phi(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = 0,$$

welche, wenn die Gleichung $\Omega = 0$ integrabel ist, der Behauptung zufolge die Form annehmen soll:

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x_0, y_0, z_0) = \text{const.}$$

Dies ist die Gleichung des Ortes von P und daher das der Differentialgleichung dieses Ortes $\Omega = 0$ entsprechende Integral.

Die soeben betreffs der Form der schliesslichen Gleichung gemachte Behauptung ist nicht erwiesen, wenn sie sich auch in besonderen Beispielen als richtig erweist. Ferner ist kein Beweis dafür gegeben, dass, falls die Behauptung betreffs der Form der schliesslichen Gleichung allgemein richtig ist, das Resultat unabhängig ist von jeder Besonderheit in der Form der Hülfsgleichungen $\chi = a$, $\chi_1 = b$, die angenommen werden kann.

An dem angegebenen Orte findet man noch Modificationen der Methode, welche denselben Einwürfen unterliegen, sowie eine Verallgemeinerung auf Gleichungen mit n Variablen*).

Beispiel 1. Wird die Methode angewendet auf die integrable Gleichung

$$2(y + z)dx + xdy + xdz = 0$$

mit den Hülfsgleichungen

$$\chi = \frac{y}{x}, \qquad \chi_1 = \frac{z}{x},$$

so führt sie (correct) zu dem Resultat

$$x^2(y + z) = x_0^2(y_0 + z_0),$$

einer einzigen Gleichung von der angenommenen Form.

---

*) Wegen anderer Einwände siehe Weiler, Schlöm. Zeitschr. Bd. 20 (1875). S. 80—83; Dubois-Reymond, Math. Ann. Bd. 12 (1877), S. 123—131.

Wird aber die Methode angewendet auf die nicht integrable Gleichung

$$xdy + ydx + xdz = 0$$

mit den Hülfsgleichungen

$$\chi = \frac{y}{x}, \qquad \chi_1 = \frac{z}{x},$$

so führt sie zu

$$(2y + z)^2 = (2y_0 + z_0)\left(2y\frac{x_0}{x} + z_0\right),$$

und wenn sie angewendet wird auf die nämliche Differentialgleichung mit den Hülfsgleichungen

$$\chi = z, \qquad \chi_1 = y,$$

so führt sie zu

$$\frac{z - z_0}{y} = \log\frac{x_0 y_0}{xy},$$

in jedem Falle also (uncorrect) zu einer einzigen Gleichung, die jedoch nicht die behauptete Form hat.

Beispiel 2. Es lässt sich leicht zeigen, dass die in der Dubois-Reymond'schen Methode gegebene praktische Regel die nämliche wird, wie das bei der Natani'schen Methode befolgte Verfahren (§ 19), falls die Hülfsgleichungen sind:

$$\chi = z = a, \qquad \chi_1 = y = 0.$$

§ 21.

Die Ableitung der Bedingungen der exacten Integrabilität einer gewöhnlichen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung (oder eines Differentialausdrucks, welcher nur Ableitungen einer einzigen abhängigen Variablen in Bezug auf eine einzige unabhängige Variable enthält), wird zuweilen abhängig gemacht von der Theorie der Integration eines im Sinne der vorhergehenden Paragraphen exacten Differentialausdrucks. Da indessen der Zusammenhang kein unmittelbarer und diese Methode nicht die Hauptmethode ist, so dürfte es genügen, hier auf einige der Abhandlungen über diesen Gegenstand, in denen man Hinweise auf Euler, Lagrange, Lexell und Condorcet findet, aufmerksam zu machen.

Sarrus, Comptes Rendus Bd. 1 (1835), S. 115—117; Bd. 28 (1849), S. 439—442; Liouville's Journ. Bd. 14 (1849), S. 131—134.

Dirksen, Abh. d. Königl. Akad. d. W. zu Berlin (1836), S. 79—98.

Bertrand, Journ. de l'éc. polyt., Bd. 17 (1841), S. 249—275; Liouville, Bd. 14 (1849), S. 123—130.

Raabe, Crelle's Journ., Bd. 31 (1846), S. 181—212.
Joachimsthal, Crelle's Journ., Bd. 33 (1846), S. 95—116.
Stoffel und Bach, Liouv. Journ. 2me Série, Bd. 7 (1862), S. 49—61.
Imschenetsky, Grun. Arch., Bd. 50 (1869), S. 278—474, insbes. § 26.
Pujet, Comptes Rendus, Bd. 82 (1876), S. 740—743.
Winckler, Wiener Sitzungsber. Bd. 88, Abth. 2 (1883), S. 820—834.

Vermischte Aufgaben.

1. Es seien P, Q, R irgend welche Functionen der drei unabhängigen Veränderlichen x, y, z und es werde einem Punkte $A(x, y, z)$ die Ebene $(X - x)P + (Y - y)Q + (Z - z)R = 0$ zugeordnet. Man zeige, dass es zwei Richtungen in dieser Ebene giebt von solcher Beschaffenheit, dass, wenn man einen dem Punkte A benachbarten und in der Ebene in einer dieser Richtungen liegenden Punkt $B(x + dx, y + dy, z + dz)$ nimmt, der Durchschnitt der A und B zugeordneten Ebenen die Linie AB ist. Man zeige ferner, dass, wenn die Relation

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}, & \frac{\partial P}{\partial y}, & \frac{\partial P}{\partial z}, & P \\ \frac{\partial Q}{\partial x}, & \frac{\partial Q}{\partial y}, & \frac{\partial Q}{\partial z}, & Q \\ \frac{\partial R}{\partial x}, & \frac{\partial R}{\partial y}, & \frac{\partial R}{\partial z}, & R \\ P, & Q, & R, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

identisch erfüllt ist, alsdann das System der allen möglichen Punkten A zugeordneten Ebenen eine Fläche umhüllt. (Voss.)

2. Im Zusammenhang mit der letzten Aufgabe zeige man, dass, wenn für die Gleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ die Integrabilitätsbedingung

$$G = P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$$

identisch erfüllt ist, alsdann die Enveloppe der zugeordneten Ebenen in ihrer allgemeinen Form ein Integral der Differentialgleichung ist, und dass in jedem Berührungspunkte einer Ebene mit der Fläche die beiden angegebenen Richtungen diejenigen der Wendetangenten der Fläche sind.

Falls $G = 0$ nicht identisch befriedigt ist, discutire man die Beziehung der Fläche $G = 0$ zur Differentialgleichung. (Voss.)

3. Man beweise, dass die Gleichung

$$(x_2^2 - x_3 x_1)dx_1 + (x_3^2 - x_1 x_2)dx_2 + (x_1^2 - x_2 x_3)dx_3 = 0$$

exact ist, und erhalte ihr Integral nach Bertrand's Methode (oder auf andere Weise) in der Form:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^{\omega^2}(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)^{\omega}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3) = \text{const.}$$

4. Man zeige, dass die totalen Differentialgleichungen

1) $x(y-1)(z-1)dx + y(z-1)(x-1)dy + z(x-1)(y-1)dz = 0$,

2) $dx + \frac{x}{y}dy - \frac{x}{2z}dz = 0$,

3) $dx + \frac{x}{2y}dy - \frac{zu}{xy}dz - \frac{z^2}{2xy}du = 0$,

4) $dx + \frac{x}{y \log yz}dy + \frac{x}{z \log yz}dz + \frac{x}{v}\cot\frac{u}{v}\left(du - \frac{u}{v}dv\right) = 0$

sämmtlich die Integrabilitätsbedingungen erfüllen, und suche die betreffenden diesen Differentialgleichungen äquivalenten Integralgleichungen. (Collet.)

5. Man integrire die folgenden Differentialgleichungen, welche durch Multiplication mit einem Factor zu exacten gemacht werden können:

1) $(yz + z^2)dx - xzdy + xydz = 0$,

2) $(y + z)^2 dx + z^2 dy + y^2 dz = 0$,

3) $z(1 - z^2)dx + zdy - (x + y + xz^2)dz = 0$,

4) $(1 + yz)^2 dx - z^2 dy + dz = 0$,

5) $H(y, z, u)dx + H(z, u, x)dy + H(u, x, y)dz + H(x, y, z)du = 0$,

wo in letzterer Gleichung $H(a, b, c)$ die Summe der gleichartigen Producte aus a, b, c von zwei Dimensionen bezeichnet.

6. Man suche die Stammgleichung von

$$\begin{vmatrix} dx, & dy, & dz, & 0 \\ x, & y, & z, & 1 \\ A_0, & A_1, & A_2, & A_3 \\ B_0, & B_1, & B_2, & B_3 \end{vmatrix} = 0$$

(der Verallgemeinerung der Hesse'schen Gleichung), wo die Grössen A und B lineare nichthomogene Functionen von x, y, z sind, in der Form

$$u_0^{c_0} u_1^{c_1} u_2^{c_2} u_3^{c_3} = \text{const.},$$

wo u_0, u_1, u_2, u_3 passend bestimmte lineare Functionen von x, y, z und c_0, c_1, c_2, c_3 Constanten sind. (Pittarelli.)

7. Man zeige, dass, wenn die Gleichung

$$P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + \cdots + P_n dx_n = 0$$

aus einer einzigen Integralgleichung ableitbar und so beschaffen ist, dass $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sämmtlich homogene Functionen von derselben Ordnung sind, alsdann

$$(P_1 x_1 + P_2 x_2 + \cdots + P_n x_n)^{-1}$$

ein integrirender Factor ist.

Man discutire den Fall, in welchem dieser integrirende Factor die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, und wende das Resultat auf die Integration der Gleichung an:

$$(y + z)^2 dx - x(y + 2z)dy - xzdz = 0.$$

(Fais.)

8. Man zeige, dass, wenn die Coefficienten in $\sum_{m=0}^{n-1} X_m dx_m$ rational sind, alsdann die Substitutionen (für $k = 0, 1, \ldots, n-1$)

$$x_k = (z_0 + \omega^k z_1 + \omega^{2k} z_2 + \cdots + \omega^{nk-k} z_{n-1})^n,$$

wo ω eine primitive n^{te} Wurzel der Einheit ist, den Differentialausdruck in

$$\sum_{m=0}^{m=n-1} \Phi(z_{m+1}, z_{m+2}, \ldots, z_{m-1})\, dz_m$$

verwandeln, und zeige, dass die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Integrabilität des Ausdrucks sich auf die $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$ Gleichungen

$$\frac{\partial \Phi(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1})}{\partial z_r} = \frac{\partial \Phi(z_r, z_{r+1}, \ldots, z_{r-1})}{\partial z_0}$$

für $r = 1, 2, 3, \ldots \frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$ reduciren. (Kronecker.)

9. Man beweise, dass die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n$$

ein exactes Differential ist, die folgenden sind:

1) dass die Gleichungen

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_j} = \frac{\partial p_j}{\partial x_1} \qquad (j = 2, \ldots, n)$$

befriedigt sind und

2) dass $p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n$, wenn man x_1 constant setzt, ein exactes Differential ist. (Laurent.)

10. Wenn die Gleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p = 0$$

sämmtliche Bedingungen erfüllt, welche erfüllt sein müssen, damit die Gleichung durch eine einzige Integralgleichung darstellbar sei, und wenn dieselbe der Reihe nach auf die Formen reducirt wird:

$$\begin{aligned} du_1 + Y_3 dx_3 + Y_4 dx_4 + \cdots + Y_p dx_p &= 0 \\ du_2 + Z_4 dx_4 + \cdots + Z_p dx_p &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ du_{p-2} + T_p dx_p &= 0 \\ du_{p-1} &= 0, \end{aligned}$$

so ist

$$\frac{1}{X_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial u_{p-2}}{\partial u_{p-3}} \frac{\partial u_{p-1}}{\partial u_{p-2}}$$

ein integrirender Factor der ursprünglichen Gleichung.

2. Kapitel.

Systeme exacter Gleichungen.

§ 22.

Wenn man ein System von n Gleichungen mit $m+n$ Veränderlichen

$$\varphi_r(u_1, u_2, \ldots, u_n, x_1, \ldots, x_m) = a_r$$

hat, wo a_r eine Constante ist und r die Werthe $1, 2, \ldots, n$ annehmen kann, so kann man sich dieselben als zur Bestimmung der n Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ als Functionen der m Veränderlichen $x_1, \ldots, x_m$ dienend denken, vorausgesetzt, dass zwischen den n Functionen φ, betrachtet als Functionen der n Variablen u, keine Functionalbeziehung besteht.

Sämmtliche Variationen der Veränderlichen sind durch n Gleichungen von der Form verbunden:

$$\sum_s \frac{\partial \varphi}{\partial u_s} du_s + \sum_t \frac{\partial \varphi}{\partial x_t} dx_t = 0.$$

Aufgelöst ergeben dieselben die Variationen du der abhängigen Veränderlichen ausgedrückt durch die Variationen dx der unabhängigen Veränderlichen mittels der n Gleichungen:

$$\text{(I)} \qquad du_s = \sum_{t=1}^{t=m} U_{s,t} dx_t$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

worin die Coefficienten $U_{s,t}$ Functionen sämmtlicher Variablen u und x sind (oder sein können), und die Gleichungen (I) sind bestimmt und in eindeutiger Weise ableitbar aus dem vorhergehenden System, weil die Determinante der Coefficienten der du in jenem System

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}$$

infolge der über die Functionen φ gemachten Voraussetzung nicht verschwindet.

Da ferner die Gleichungen (I) aus dem früheren System abgeleitet sind, so führt die Substitution der durch (I) gegebenen Werthe der du zu Identitäten; daher ist für jede der n Functionen φ die Gleichung

$$\sum_{t=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial u_s}U_{s,t}\right)dx_t+\sum_{t=1}^{m}\frac{\partial\varphi}{\partial x_t}dx_t=0$$

identisch erfüllt. Daraus folgt, dass der Coefficient eines jeden der Differentialelemente dx verschwinden muss, und daher genügt φ den m Differentialgleichungen

$$\text{(II)}\qquad \Delta_t\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x_t}+\sum_{s=1}^{n}U_{s,t}\frac{\partial\varphi}{\partial u_s}=0$$
$$(t=1,\,2,\,\ldots,\,m).$$

§ 23.

Gerade so wie im Falle einer einzigen Gleichung ergiebt sich, dass jede functionale Verbindung der Grössen φ eine Lösung der Gleichungen (I) oder (II) ist. Denn was die Gleichungen (I) betrifft, so sind dieselben äquivalent mit

$$d\varphi_1=0,\qquad d\varphi_2=0,\,\ldots,\,d\varphi_n=0,$$

und daher haben wir, wenn ψ eine Function von $\varphi_1,\,\varphi_2,\,\ldots,\,\varphi_n$ ist:

$$d\psi=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi_r}d\varphi_r$$
$$=0$$

zufolge der Gleichungen (I), d. h. ψ ist eine Lösung. Und was die Gleichungen (II) anlangt, so ist

$$\Delta_t\psi=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi_r}\Delta_t\varphi_r$$
$$=0$$

zufolge der Gleichungen (II), d. h. ψ ist eine Lösung.

Umgekehrt kann jede Lösung des Systems (I) oder des Systems (II) dargestellt werden als eine Function der n unabhängigen Lösungen $\varphi_1,\,\varphi_2,\,\ldots,\,\varphi_n$. Denn nimmt man dieselbe für ψ, so ist sie eine gewisse Function von $u_1,\,u_2,\,\ldots,\,u_n$ und der unabhängigen Veränderlichen $x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_m$ und bestimmt man $u_1,\,u_2,\,\ldots,\,u_n$ als Functionen der Lösungen φ und der Variablen x, so erhält man ψ in der Form:

$$\psi=\psi(\varphi_1,\,\varphi_2,\,\ldots,\,\varphi_n,\,x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_m).$$

Was die Gleichungen (I) anlangt, so hat man, da ψ eine Lösung ist, $d\psi = 0$ und ebenso ist infolge derselben Gleichungen, da die Grössen φ Lösungen derselben sind, $d\varphi_1 = 0, \ldots, d\varphi_n = 0$, daher:

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial x_m} dx_m.$$

Nun sind aber die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ nach Voraussetzung unabhängig von einander und es kann somit zwischen ihren Variationen keine Beziehung existiren. Demnach können die vorstehenden Gleichungen nur erfüllt werden durch

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_m} = 0,$$

oder es ist ψ in seiner letzteren Form explicit unabhängig von $x_1, x_2, \ldots, x_m$ und kann daher dargestellt werden als Function von $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. — Was die Gleichungen (II) betrifft, so erhalten wir, wenn wir ψ in derselben Form nehmen, die Gleichungen:

$$0 = \Delta_t \psi = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi_r} \Delta_t \varphi_r \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x_t},$$

da die Grössen u nur in den Grössen φ vorkommen; somit haben wir, da $\Delta_t \varphi_r = 0$ ist, für jeden der Werthe $t = 1, 2, \ldots, m$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_t} = 0$$

und werden somit zu demselben Schlusse geführt wie vorher.

§ 24.

Multiplicirt man die Gleichungen (I) mit $\lambda_{1,s}, \lambda_{2,s}, \ldots, \lambda_{r,s}$, wo $\lambda_{r,s} = \frac{\partial \varphi_r}{\partial u_s}$ und addirt man, so erhält man

$$d\varphi_r = 0,$$

eine Gleichung in integrirbarer Form. Ein solches System von Grössen kann ein System von integrirenden Factoren genannt werden; augenscheinlich muss es n unabhängige Systeme von integrirenden Factoren geben, von denen jedes zur Ableitung einer integrablen Gleichung dient, und die Determinante der n Systeme ist nicht Null, da die Jacobi'sche Determinante der Functionen φ mit Bezug auf die Variablen u nicht Null ist.

Nun sei ψ irgend ein anderes Integral des Gleichungssystems, so dass, wie eben bewiesen

$$\psi = \psi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$$

ist, und es seien $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ das System der integrirenden Factoren, welches zur Ableitung der Gleichung $d\psi = 0$ dient. Dann ist:

$$\varrho_r = \frac{\partial \psi}{\partial u_r} = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1} \lambda_{1,r} + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_2} \lambda_{2,r} + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_n} \lambda_{n,r}$$

für $r = 1, 2, \ldots, n$. Die Determinante der rechten Seiten, dieselben betrachtet als linear in den Grössen $\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$, ist eine nicht verschwindende Grösse, da sie aus den n unabhängigen Systemen von integrirenden Factoren gebildet ist, so dass die n Gleichungen nach den Grössen $\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$ aufgelöst werden können in der Form:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1} = \frac{M_1}{M}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_2} = \frac{M_2}{M}, \ldots, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_n} = \frac{M_n}{M}.$$

Der Werth von M ist

$$M = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}$$

und der von M_r:

$$M_r = (-1)^r \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_{r-1}, \psi, \varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)},$$

so dass alle Grössen M von derselben Art, nämlich Jacobi'sche Determinanten von Systemen von n Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichungen sind. Eine solche Grösse wie M oder M_r wird nach Jacobi ein Multiplicator genannt: sie ist ihrer Entstehung nach eine von Null verschiedene Grösse.

Nun sind, wofern nicht die Hesse'sche Determinante von ψ, betrachtet als Function von $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, verschwindet, die Grössen $\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$ von einander unabhängig, so dass es keine identische Relation zwischen ihnen mit nur constanten Coefficienten giebt. Die Folge dieser Unabhängigkeit der Grössen M ist, dass es zwischen den $n + 1$ Grössen M keinerlei homogene Relation von irgend einem Grade mit constanten Coefficienten giebt.

Wenn wir dann annehmen, dass keine der Grössen $\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$ eine Constante oder Null ist, so wird jede von ihnen eine functionale Verbindung der Grössen φ und daher eine Lösung des Gleichungssystems sein, und da sie der Annahme nach von einander unabhängige functionale Verbindungen der Grössen φ sind, so folgt, dass die n Grössen $\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$ ein vollständiges System von Integralen analog dem Integralsystem $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ bilden.

Hieraus können wir nun einige **Folgerungen** ziehen:

(A). Wenn ein Multiplicator M der Gleichungen (I) bekannt ist, so ist jeder andere Multiplicator von der Form $M\Phi$, wo $\Phi =$ const. eine Lösung der Gleichungen ist.

Denn jeder andere Multiplicator ist eine Jacobi'sche Determinante eines Systemes von Lösungen; der Quotient dieser Jacobi'schen Determinante durch M ist die Jacobi'sche Determinante des Systems von Lösungen in Bezug auf $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ und daher ist sie, weil sie eine Function von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ist, eine Lösung der Gleichungen.

Hieraus umgekehrt:

(A'). Wenn zwei unabhängige Multiplicatoren gefunden sind, deren Quotient nicht constant ist, so ist dieser Quotient eine Lösung der Gleichungen (I) oder (II).

Ferner:

(B). Wenn $n+1$ Multiplicatoren von solcher Beschaffenheit gefunden sind, dass zwischen ihnen keine homogene Relation von irgend welcher Ordnung existirt, so bilden die n Quotienten aus irgend welchen n von ihnen durch den übrigbleibenden ein vollständiges Integralsystem der Differentialgleichungen.

Und, wie man leicht durch ähnliche Betrachtungen beweisen kann:

(C). Wenn $p+n+1$ Multiplicatoren gefunden sind, so bestehen zwischen ihnen mindestens p identische Relationen, deren Coefficienten constant sind.

§ 25.

Nun können wir aus einem bekannten von Jacobi*) herrührenden Determinantensatze die partiellen Differentialgleichungen ableiten, denen diese Multiplicatoren genügen. Der Satz lautet:

Wenn $n+1$ Functionen (etwa die vorher betrachteten Functionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ und irgend eine andere Function φ) mit $n+1$ Veränderlichen (z. B. $u_1, u_2, \ldots, u_n$ und einer andern Veränderlichen x) vorhanden sind und wenn

$$\frac{\partial(\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x, u_1, \ldots, u_n)} = A\frac{\partial\varphi}{\partial x} + A_1\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} + \cdots + A_n\frac{\partial\varphi}{\partial u_n}$$

ist, so sind die Grössen A von solcher Beschaffenheit, dass

*) Crelle, Bd. 27 (1844), S. 21. Ges. Werke Bd. 4, S. 323.

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial u_1} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial u_n} = 0$$

ist.

Diesen Satz können wir auf die in Betrachtung stehenden Functionen anwenden, wenn wir x mit irgend einer der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ identificiren. A wird gegeben durch die Grösse M, und für $x = x_t$ ist:

$$A_r = (-1)^r \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x, u_1, \ldots, u_{r-1}, u_{r+1}, \ldots, u_n)},$$

wo in dem Nenner u_r nicht vorkommt. Nach (II) aber ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_t} = -\sum_{s=1}^{n} U_{s,t} \frac{\partial \varphi}{\partial u_s}$$

daher:

$$A_r = (-1)^{r+1} \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(u_r, u_1, \ldots, u_n)} U_{r,t},$$

wo u_r in der Aufeinanderfolge $u_1, \ldots, u_n$ nicht vorkommt; somit:

$$A_r = (-1)^{r+1} \cdot (-1)^{r-1} \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)} U_{r,t}$$

$$= \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)} U_{r,t},$$

wobei die Reihe $u_1, u_2, \ldots, u_n$ jetzt alle Variablen u umfasst. Daher

$$A_r = M U_{r,t},$$

und somit erhalten wir, wenn wir für A_r $(r = 1, 2, \ldots, n)$ und für A ihre Werthe substituiren, die Gleichung

$$\frac{\partial M}{\partial x_t} + \frac{\partial(M U_{1,t})}{\partial u_1} + \frac{\partial(M U_{2,t})}{\partial u_2} + \cdots \frac{\partial(M U_{n,t})}{\partial u_n} = 0.$$

Die abhängige Variable M in dieser Gleichung ist die von Null verschiedene Jacobi'sche Determinante von n Lösungen der Gleichungen (I) oder (II) mit Bezug auf $u_1, \ldots, u_n$; es wird daher die nämliche Gleichung auch befriedigt, wenn man der Reihe nach in dieser Jacobi'schen Determinante ψ durch $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ersetzt, d. h. die andern Multiplicatoren $M_1, \ldots, M_n$ genügen ebenfalls der Gleichung. Nach den Sätzen (B) und (C) genügt demnach jeder Multiplicator dieser Gleichung, und daher werden, weil die Gleichung gilt für die Werthe $t = 1, 2, \ldots, m$, die Multiplicatoren des Systems (I) oder (II) bestimmt durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
\nabla_1 \vartheta = \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + \dfrac{\partial(\vartheta U_{1,1})}{\partial u_1} + \dfrac{\partial(\vartheta U_{2,1})}{\partial u_2} + \cdots + \dfrac{\partial(\vartheta U_{n,1})}{\partial u_n} = 0 \\
\nabla_2 \vartheta = \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x_2} + \dfrac{\partial(\vartheta U_{1,2})}{\partial u_1} + \dfrac{\partial(\vartheta U_{2,2})}{\partial u_2} + \cdots + \dfrac{\partial(\vartheta U_{n,2})}{\partial u_n} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\nabla_m \vartheta = \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x_m} + \dfrac{\partial(\vartheta U_{1,m})}{\partial u_1} + \dfrac{\partial(\vartheta U_{2,m})}{\partial u_2} + \cdots + \dfrac{\partial(\vartheta U_{n,m})}{\partial u_n} = 0.
\end{array}\right\} \quad \text{(III)}$$

Beispiel. Aus (III) kann man sogleich eine Verification des Satzes (A') im vorigen Paragraphen ableiten. Denn wenn ϑ und $\vartheta\varphi$ zwei Lösungen von (III) sind, so ist

$$\nabla_t \vartheta = 0$$

$$0 = \nabla_t(\vartheta\varphi) = \varphi \nabla_t \vartheta + \vartheta \nabla_t \varphi,$$

und somit genügt φ, der Quotient zweier Lösungen von (III), der Gleichung

$$\nabla_t \varphi = 0$$

für die Werthe $t = 1, 2, \ldots, m$. Daher ist φ eine Lösung von (II), dem ursprünglichen System von Differentialgleichungen.

§ 26.

Wir nehmen nun an, dass, anstatt aus einer Reihe von gegebenen Integralgleichungen der betrachteten Type die Differentialgleichungen abzuleiten, verlangt würde, man solle das einem gegebenen System von unabhängigen Differentialgleichungen äquivalente System von Integralgleichungen finden.

Die allgemeinste Form der Differentialgleichungen ist:

$$\sum_{s=1}^{n} X_{r,s}\, du_s + \sum_{t=1}^{m} Y_{r,t}\, dx_t = 0$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n),$$

wo die Coefficienten X und Y Functionen der Veränderlichen u und x sind. Da jede lineare Combination dieser Gleichungen durch die nämlichen Integralgleichungen befriedigt wird, wie das vorstehende System, so können dieselben ersetzt werden durch das System:

$$\text{(I)} \qquad du_r = \sum_{t=1}^{m} U_{r,t}\, dx_t,$$

welches man durch Auflösung des vorigen Systems nach $du_1, \ldots, du_n$ erhält, und dieses System umfasst n Gleichungen und die Coefficienten U

sind sämmtlich Functionen von x und u. Es wird angenommen, dass die Gleichungen in dieser Form dargestellt werden können, eine Annahme, welche voraussetzt, dass die Determinante der Coefficienten X nicht verschwindet, und welche durch die weitere Voraussetzung gerechtfertigt ist, dass die Gleichungen des Systems von einander unabhängig sind. Die Form (I) wollen wir als die kanonische Form solcher Gleichungssysteme betrachten.

Damit ein solches Gleichungssystem wie (I) durch ein System von Integralgleichungen, welche ausreichen, um $u_1, u_2, \ldots, u_n$ als Functionen der unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ zu bestimmen, ersetzt werden könne, müssen gewisse Bedingungen erfüllt sein. Anstatt die Coëfficienten U als aus Ableitungen der (unbekannten) Functionen φ zusammengesetzt zu betrachten, können wir annehmen, dass die u ausdrückbar seien mittels des unbekannten Integralsystems in der Form expliciter Functionen der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$, und wenn sie in dieser Weise ausgedrückt sind, so genügen sie den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen:

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial u}{\partial x_t}\right) = \frac{\partial}{\partial x_t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_s}\right),$$

welche auf jede der abhängigen Variablen für alle Combinationen von je zwei Indices s und t sich beziehen.

Aus dem System (I) haben wir

$$\frac{\partial u_r}{\partial x_r} = U_{r,t}, \tag{1}$$

für jeden der Indices $t (= 1, 2, \ldots, m)$ und jeden der Indices $r (= 1, 2, \ldots, n)$, und wenn wir in $U_{r,t}$ diejenigen Variablen u, welche darin etwa vorkommen, durch ihre Werthe in $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ersetzen, so ist der sich ergebende Werth von $\frac{\partial u_r}{\partial x_t}$ derselbe, wie der in der obigen Bedingung. Bezeichnen wir diesen Werth mit $\left[\frac{\partial u_r}{\partial x_t}\right]$, so wird die obige Bedingung:

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\left[\frac{\partial u_r}{\partial x_t}\right] = \frac{\partial}{\partial x_t}\left[\frac{\partial u_r}{\partial x_s}\right].$$

Die Gesammtheit dieser Bedingungen, welche nothwendig und hinreichend sind für die Integralgleichungen, ist sicher nothwendig für die Differentialgleichungen unter der gemachten Voraussetzung; es darf jedoch nicht ohne Beweis angenommen werden, dass sie für die Differentialgleichungen auch hinreichend ist. Nun ist:

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\left[\frac{\partial u_r}{\partial x_t}\right] = \frac{\partial U_{r,t}}{\partial x_s} + \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial U_{r,t}}{\partial u_p}\frac{\partial u_p}{\partial x_s}$$

$$= \frac{\partial U_{r,t}}{\partial x_s} + \sum_{p=1}^{n} U_{p,s}\frac{\partial U_{r,t}}{\partial u_p},$$

wo die Grössen auf der rechten Seite genau von der Form sind, wie sie in (I) vorkommen. Analoges hat man für die andere Seite der Bedingungsgleichung, welche demnach übergeht in:

$$\frac{\partial U_{r,t}}{\partial x_s} + \sum_{p=1}^{n} U_{p,s}\frac{\partial U_{r,t}}{\partial u_p} = \frac{\partial U_{r,s}}{\partial x_t} + \sum_{p=1}^{n} U_{p,t}\frac{\partial U_{r,s}}{\partial u_p}$$

oder was dasselbe ist:

$$(2) \qquad \frac{\partial U_{r,t}}{\partial x_s} - \frac{\partial U_{r,s}}{\partial x_t} + \sum_{p=1}^{n}\left(U_{p,s}\frac{\partial U_{r,t}}{\partial u_p} - U_{p,t}\frac{\partial U_{r,s}}{\partial u_p}\right) = 0.$$

Diese Gleichung muss erfüllt sein:

1) für jeden der Werthe $1, 2, \ldots, n$ von r,

2) für jede der $\frac{1}{2}m(m-1)$ Combinationen je zweier Indices s und t der Reihe $1, 2, \ldots, m$;

somit ist die Gesammtzahl der durch (2) dargestellten Bedingungen gleich

$$\frac{1}{2}nm(m-1)$$

und diese Bedingungen sind unabhängig von einander.

§ 27.

Es bleibt nun zu beweisen, dass diese nothwendigen Bedingungen auch hinreichend dafür sind, dass das Integraläquivalent der n Differentialgleichungen (I) aus einem System von n von einander unabhängigen Integralgleichungen besteht. Hierzu bedienen wir uns eines inductiven Verfahrens. Das gegebene System (I) mit n abhängigen und m unabhängigen Variablen wird durch Veränderung dieser Variablen in ein anderes ähnliches System mit n abhängigen und $m-1$ unabhängigen Variablen transformirt und es wird gezeigt, dass von den $\frac{1}{2}nm(m-1)$ nothwendigen Bedingungen des ursprünglichen Systems $\frac{1}{2}n(m-1)(m-2)$ Bedingungen von der nothwendigen entsprechenden Form für das transformirte System übrig bleiben.

Um die Transformationen zu erhalten, nehmen wir zunächst an, dass sich die sämmtlichen Veränderlichen $x_2, \ldots, x_m$ nicht ändern. Die Gleichungen (I) nehmen die Form an:

$$\frac{du_1}{U_{1,1}} = \frac{du_2}{U_{2,1}} = \cdots = \frac{du_n}{U_{n,1}} = dx_1 .$$

n von einander unabhängige Integrale dieser n Gleichungen seien

$$\xi_1 = \text{const.}, \quad \xi_2 = \text{const.}, \ldots, \quad \xi_n = \text{const.},$$

wo $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ Functionen von $u_1, u_2, \ldots, u_n, x_1$ und constanter Grössen, welche in $U_{1,1}, U_{2,1}, \ldots, U_{n,1}$ vorkommen können, d. h. von $x_2, \ldots, x_m$ sind. Diese Functionen ξ genügen sämmtlich der Gleichung:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \sum_{r=1}^{n} U_{r,1} \frac{\partial \xi}{\partial u_r} = 0 . \tag{3}$$

Nachdem wir auf solche Weise diese n unabhängigen Functionen ξ erhalten haben, benutzen wir sie zur Bildung von Transformationsgleichungen in der Form

$$\xi_1 = v_1, \quad \xi_2 = v_2, \ldots, \quad \xi_n = v_n ,$$

wo $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (in Bezug auf x_1 constant, aber) Functionen von $x_2, \ldots, x_m$ sind, die jetzt bestimmt werden sollen. Nimmt man irgend eine der Gleichungen, etwa

$$\xi = v ,$$

so ist:

$$dv = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \xi}{\partial u_r} du_r + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \xi}{\partial x_s} dx_s$$

$$= \sum_{s=1}^{m} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_s} + U_{1,s} \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + U_{2,s} \frac{\partial \xi}{\partial u_2} + \cdots + U_{n,s} \frac{\partial \xi}{\partial u_n} \right) dx_s ,$$

wenn man für die Grössen du aus den Gleichungen (I) ihre Werthe substituirt. Der Coefficient des Elementes dx_1 auf der rechten Seite verschwindet aber infolge der partiellen Differentialgleichung, welcher ξ genügt, so dass die Annahme, dass dv unabhängig von dx_1 ist, hierdurch gerechtfertigt ist. Setzen wir

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial x_s} + U_{1,s} \frac{\partial \xi_r}{\partial u_1} + U_{2,s} \frac{\partial \xi_r}{\partial u_2} + \cdots + U_{n,s} \frac{\partial \xi_r}{\partial u_n} = V'_{r,s} , \tag{4}$$

so wird

$$dv_r = \sum_{s=2}^{m} V'_{r,s} dx_s \tag{I'}$$

für $r = 1, 2, \ldots, n$.

§ 28.

Dies ist das angedeutete transformirte System. Wir wollen nun die Coefficienten $V'_{r,s}$ betrachten. Aus den n unabhängigen Gleichungen

$$\xi = v$$

können wir die Werthe von $u_1, u_2, \ldots, u_n$ als Functionen von $v_1, v_2, \ldots, v_n, x_1, x_2, \ldots, x_m$ finden, und wenn diese Werthe für die u in $V'_{r,s}$, überall wo sie vorkommen, substituirt werden, so wird letzteres in eine Function von $v_1, v_2, \ldots, v_n, x_1, x_2, \ldots, x_m$ verwandelt. Bezeichnet man diesen transformirten Werth von $V'_{r,s}$ mit $V_{r,s}$, so ist $V_{r,s}$ explicit unabhängig von x_1, ein Resultat, infolge dessen das System (I′) dann nur $m - 1$ unabhängige Variablen enthält.

Der soeben ausgesprochene Satz kann folgendermassen bewiesen werden. Es bezeichne Θ' irgend eine Function von $u_1, u_2, \ldots, u_n, x_1, \ldots, x_m$ und Θ dieselbe Function, wenn man darin für $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ihre Werthe in $v_1, v_2, \ldots, v_n, x_1, \ldots, x_m$ substituirt hat; es enthält dann also Θ die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ und $v_1 (= \xi_1), v_2 (= \xi_2), \ldots, v_n (= \xi_n)$. Es ist:

$$\frac{\partial \Theta'}{\partial x_1} = \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi_r} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_1}$$

und

$$\frac{\partial \Theta'}{\partial u_p} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi_r} \frac{\partial \xi_r}{\partial u_p}$$

für $p = 1, 2, \ldots, n$; daher:

$$\frac{\partial \Theta'}{\partial x_1} + \sum_{p=1}^{n} U_{p,1} \frac{\partial \Theta'}{\partial u_p} = \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} + \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi_r} \left\{ \frac{\partial \xi_r}{\partial x_1} + \sum_{p=1}^{n} U_{p,1} \frac{\partial \xi_r}{\partial u_p} \right\}.$$

Infolge der Differentialgleichung (3), welcher alle Functionen ξ genügen, ist der Coefficient jedes Ausdrucks $\frac{\partial \Theta}{\partial \xi_r}$ auf der rechten Seite gleich Null, daher

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x_1} = \frac{\partial \Theta'}{\partial x_1} + \sum_{p=1}^{n} U_{p,1} \frac{\partial \Theta'}{\partial u_p},$$

und diese Gleichung drückt den Werth von $\frac{\partial \Theta}{\partial x_1}$, soweit x_1 explicit in der transformirten Function Θ vorkommt, durch die Ableitungen der untransformirten Function Θ' aus.

Wendet man dieses allgemeine Resultat auf die Coefficienten in (I′) an, so erhält man:

$$\frac{\partial V_{r,s}}{\partial x_1} = \frac{\partial V'_{r,s}}{\partial x_1} + \sum_{p=1}^{n} U_{p,1} \frac{\partial V'_{r,s}}{\partial u_p}.$$

Substituirt man aus (4) den Werth

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial x_s} + \sum_{q=1}^{n} U_{q,s} \frac{\partial \xi_r}{\partial u_q}$$

für $V'_{r,s}$, so folgt:

$$\frac{\partial V_{r,s}}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial x_1 \partial x_s} + \sum_{p=1}^{n} U_{p,1} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial x_s \partial u_p}$$

$$+ \sum_{q=1}^{n} U_{q,s} \left\{ \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial u_q \partial x_1} + \sum_{p=1}^{n} U_{p,1} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial u_q \partial u_p} \right\}$$

$$+ \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial \xi_r}{\partial u_q} \left\{ \frac{\partial U_{q,s}}{\partial x_1} + \sum_{p=1}^{n} U_{p,1} \frac{\partial U_{q,s}}{\partial u_p} \right\}.$$

Infolge der Differentialgleichung (3) aber ist:

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial x_1} + \sum_{p=1}^{n} U_{p,1} \frac{\partial \xi_r}{\partial u_p} = 0;$$

differentiirt man dies nach dem explicit vorkommenden x_s, so hat man:

$$\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial x_1 \partial x_s} + \sum_{p=1}^{n} U_{p,1} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial x_s \partial u_p} = -\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial U_{p,1}}{\partial x_s} \frac{\partial \xi_r}{\partial u_p}$$

$$= -\sum_{q=1}^{n} \frac{\partial U_{q,1}}{\partial x_s} \frac{\partial \xi_r}{\partial u_q},$$

wodurch die erste Zeile des Ausdrucks für $\frac{\partial V_{r,s}}{\partial x_1}$ transformirt wird.

Analog erhält man, wenn man die Gleichung in Bezug auf das explicite Auftreten von u_q differentiirt:

$$\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial u_q \partial x_1} + \sum_{p=1}^{n} U_{p,1} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial u_q \partial u_p} = -\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial U_{p,1}}{\partial u_q} \frac{\partial \xi_r}{\partial u_p}$$

und daher:

$$\sum_{q=1}^{n} U_{q,s} \left\{ \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial u_q \partial x_1} + \sum_{p=1}^{n} U_{p,1} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial u_q \partial u_p} \right\} = -\sum_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} U_{q,s} \frac{\partial U_{p,1}}{\partial u_q} \frac{\partial \xi_r}{\partial u_p}$$

$$= -\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} U_{p,s} \frac{\partial U_{q,1}}{\partial u_p} \frac{\partial \xi_r}{\partial u_q},$$

wodurch die zweite Zeile des Ausdruckes für $\frac{\partial V_{r,s}}{\partial x_1}$ transformirt wird. Demnach erhält man nach der Substitution:

$$\frac{\partial V_{r,s}}{\partial x_1} = \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial \xi_r}{\partial u_q} \left\{ \frac{\partial U_{q,s}}{\partial x_1} - \frac{\partial U_{q,1}}{\partial x_s} + \sum_{p=1}^{n} \left(U_{p,1} \frac{\partial U_{q,s}}{\partial u_p} - U_{p,s} \frac{\partial U_{q,1}}{\partial u_p} \right) \right\}$$
$$= 0,$$

da der Coefficient eines jeden der Ausdrücke $\frac{\partial \xi_r}{\partial u_q}$ $(q = 1, 2, \ldots, n)$ infolge der Bedingungen (2) verschwindet. Demnach ist $V_{r,s}$ explicit unabhängig von x_1 und somit ist das Gleichungssystem (I) transformirt in das System

$$\text{(I')} \qquad dv_r = \sum_{s=2}^{m} V_{r,s}\, dx_s,$$

in welchem x_1 nicht mehr explicit vorkommt.

§ 29.

Von den Bedingungen (2) sind eine gewisse Anzahl gebraucht worden, um diese Elimination auszuführen, nämlich diejenigen Gleichungen von (2), welche gelten

1) für jeden der Werthe $1, 2, \ldots, n$ von r, gleichzeitig mit
2) sämmtlichen $m - 1$ Combinationen von s mit 1.

Demnach sind $n(m-1)$ Bedingungen benutzt worden; es bleiben somit $\frac{1}{2} nm(m-1) - n(m-1) = \frac{1}{2} n(m-1)(m-2)$ Bedingungen übrig, welche noch nicht benutzt sind. Es sind dies diejenigen Gleichungen (2), welche gelten

1) für jeden der Werthe $1, 2, \ldots, n$ von r, gleichzeitig mit
2) jeder der $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ Combinationen von s und t aus der Reihe der Zahlen $2, 3, \ldots, m$.

Diese übrig bleibenden Bedingungen können transformirt werden.

Es ist:

$$V_{r,t} = \frac{\partial \xi_r}{\partial x_t} + \sum_{q=1}^{n} U_{q,t} \frac{\partial \xi_r}{\partial u_q},$$

und somit:

$$\frac{\partial V_{r,t}}{\partial x_s} + \sum_{p=2}^{n} \frac{\partial V_{r,t}}{\partial v_p} \frac{\partial v_p}{\partial x_s} = \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial x_s \partial x_t} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial x_t \partial u_l} U_{l,s}$$

$$+ \sum_{q=1}^{n} U_{q,t} \left\{ \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial u_q \partial x_s} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial u_q \partial u_l} U_{l,s} \right\}$$

$$+ \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial \xi_r}{\partial u_q} \left\{ \frac{\partial U_{q,t}}{\partial x_s} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial U_{q,t}}{\partial u_l} U_{l,s} \right\}$$

$$= \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial x_s \partial x_t} + \sum_{q=1}^{n} \left(U_{q,s} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial u_q \partial x_t} + U_{q,t} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial u_q \partial x_s} \right)$$

$$+ \sum_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} U_{q,t} U_{p,s} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial u_p \partial u_q}$$

$$+ \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial \xi_r}{\partial u_q} \left\{ \frac{\partial U_{q,t}}{\partial x_s} + \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial U_{q,t}}{\partial u_p} U_{p,s} \right\}.$$

Da nun

$$v_p = \xi_p$$

ist, so erhalten wir:

$$\frac{\partial v_p}{\partial x_s} = \frac{\partial \xi_p}{\partial x_s} + \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial \xi_p}{\partial u_q} U_{q,s} = V_{p,s}$$

wegen (4), ein Resultat, welches auch aus (I′) hätte gefolgert werden können. Demnach:

$$\frac{\partial V_{r,t}}{\partial x_s} + \sum_{p=2}^{n} V_{p,s} \frac{\partial V_{r,t}}{\partial v_p} = \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial x_s \partial x_t} + \sum_{q=1}^{n} \left(U_{q,s} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial u_q \partial x_t} + U_{q,t} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial u_q \partial x_s} \right)$$

$$+ \sum_{q=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} U_{q,t} U_{p,s} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial u_p \partial u_q}$$

$$+ \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial \xi_r}{\partial u_q} \left\{ \frac{\partial U_{q,t}}{\partial x_s} + \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial U_{q,t}}{\partial u_p} U_{p,s} \right\}.$$

Vertauscht man s und t und subtrahirt man die entsprechenden Seiten der beiden Gleichungen von einander, so findet man:

$$\frac{\partial V_{r,t}}{\partial x_s} - \frac{\partial V_{r,s}}{\partial x_t} + \sum_{p=2}^{n} \left(V_{p,s} \frac{\partial V_{r,t}}{\partial v_p} - V_{p,t} \frac{\partial V_{r,s}}{\partial v_p} \right)$$

$$= \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial \xi_r}{\partial u_q} \left\{ \frac{\partial U_{q,t}}{\partial x_s} - \frac{\partial U_{q,s}}{\partial x_t} + \sum_{p=1}^{n} \left(U_{p,s} \frac{\partial U_{q,t}}{\partial u_p} - U_{p,t} \frac{\partial U_{q,s}}{\partial u_p} \right) \right\},$$

eine Gleichung, deren Covarianten-Charakter bemerkenswerth ist.

Da die Coefficienten der Ausdrücke $\frac{\partial \xi_r}{\partial u_q}$ auf der rechten Seite sämmtlich verschwinden, so folgt:

$$(2') \qquad \frac{\partial V_{r,t}}{\partial x_s} - \frac{\partial V_{r,s}}{\partial x_t} + \sum_{p=2}^{n} \left(V_{p,s} \frac{\partial V_{r,t}}{\partial v_p} - V_{p,t} \frac{\partial V_{r,s}}{\partial v_p} \right) = 0,$$

eine Gleichung, welche gilt

1) für jeden der Werthe $1, 2, \ldots, n$ von r,

2) für jede der $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ Combinationen von je zwei Indices s und t aus der Reihe $2, 3, \ldots, m$.

Demnach umfasst (2′) im Ganzen

$$\frac{1}{2} n(m-1)(m-2)$$

Combinationen. Da ferner die Grössen ξ_r als Functionen von $u_1, \ldots, u_n$ von einander unabhängig sind, also ihre Jacobi'sche Determinante nicht verschwindet, so folgt aus den Gleichungen (2′) umgekehrt, dass sämmtliche Coefficienten der Grössen $\frac{\partial \xi_r}{\partial u_q}$ in den vorhergehenden Gleichungen verschwinden. Es ergiebt sich somit, dass die

$$\frac{1}{2} n(m-1)(m-2)$$

Bedingungen (2′) den $\frac{1}{2} n(m-1)(m-2)$ Bedingungen, welche nach der Transformation (1′) noch übrig bleiben, äquivalent sind und sich ebenso weit erstrecken wie diese. Demnach können diese neuen Bedingungen (1′) an die Stelle der alten gesetzt werden.

§ 30.

Die neuen Bedingungen (2′) stehen in derselben Beziehung zu den neuen Gleichungen (I′), wie die ursprünglichen Bedingungen (2) zu den ursprünglichen Gleichungen (I). Wenn demnach das System der Gleichungen (I′) mit n abhängigen und $m-1$ unabhängigen Variablen infolge der Bedingungen (2′) ein Integral-Aequivalent in der Form eines Systems von n Integralgleichungen besitzt, so folgt, dass das System der Gleichungen (I) mit n abhängigen und m unabhängigen Variablen infolge der Bedingungen (2) ein Integral-Aequivalent in der Form eines Systems von n Integralgleichungen besitzt.

Nun sind für eine einzige unabhängige Variable die Bedingungen erfüllt und man weiss, dass das äquivalente Integral alsdann aus

n Gleichungen besteht. Somit erhalten wir durch Induction den folgenden **Satz**:

Damit ein System von n simultanen linearen Differentialgleichungen

$$du_r = \sum_{t=1}^{m} U_{r,t}\, dx_t,$$

worin $r = 1, 2, \ldots, n$ ist und die Coefficienten $U_{r,t}$ Functionen sämmtlicher Variablen x und u sind, ein Integraläquivalent in der Form eines Systems von n Integralgleichungen besitzen könne, ist nothwendig, dass die Bedingungen

$$\frac{\partial U_{r,t}}{\partial x_s} - \frac{\partial U_{r,s}}{\partial x_t} + \sum_{p=1}^{n} \left(U_{p,s} \frac{\partial U_{r,t}}{\partial u_p} - U_{p,t} \frac{\partial U_{r,s}}{\partial u_p} \right) = 0$$

befriedigt sein müssen 1) für jeden der Werthe $1, 2, \ldots, n$ von r und 2) für jede der $\frac{1}{2} m(m-1)$ möglichen Combinationen der Indices s und t aus der Reihe $1, 2, \ldots, m$; und das identische Erfülltsein dieser Bedingungen ist hinreichend dafür, dass ein Integraläquivalent von der angegebenen Form wirklich existirt*).

§ 31.

Die folgende Methode**), die nothwendigen Bedingungen, welche wir (nach dem soeben Bewiesenen) auch als hinreichend annehmen dürfen, darzustellen, bezieht sich auf die nicht vereinfachte oder unkanonische Form der Gleichungen. Die Gleichungen mögen n Veränderliche enthalten und ihre Anzahl möge k sein, wo k nicht grösser ist als n. Die Gleichungen selbst seien:

$$X_{1,1}\, dx_1 + \cdots + X_{1,n}\, dx_n = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_{k,1}\, dx_1 + \cdots + X_{k,n}\, dx_n = 0.$$

Sind dann die Coefficienten X derart, dass nur m von diesen Gleichungen unabhängig sind, so sind sämmtliche $k-m$ übrig bleibenden Gleichungen lineare Combinationen dieser m Gleichungen, für welche

*) Dieses Resultat scheint zuerst von Deahna angegeben zu sein, Crelle's Journ. Bd. 20 (1840), S. 340—349.

**) Frobenius, Crelle's Journ. Bd. 82 (1877), S. 276 u. ff.

wir die m ersten Gleichungen nehmen können. Wir wollen die nothwendigen (und hinreichenden) Bedingungen dafür aufstellen, dass die m Gleichungen ein exactes System bilden und daher m von einander unabhängige Integrale besitzen.

Ist eins dieser angenommenen Integrale $f =$ const., so muss die Differentialrelation

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0$$

eine lineare Combination der m vorstehend angenommenen unabhängigen Gleichungen sein und daher müssen alle Determinanten $m + 1^{\text{ter}}$ Ordnung des Systems

$$\cdots \begin{Vmatrix} X_{1,1}, & \ldots, & X_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{m,1}, & \ldots, & X_{m,n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{Vmatrix} \cdots$$

verschwinden. Somit genügen alle Systeme der Grössen ξ, welche den Gleichungen

$$X_{\mu,1}\xi_1 + \cdots + X_{\mu,n}\xi_n = 0$$

(für $\mu = 1, \ldots, m$) genügen, auch der Gleichung:

$$\Xi(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\xi_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\xi_n = 0,$$

die somit eine Differentialgleichung für das Integral f ist. Und da jede der urspünglichen Gleichungen dargestellt werden kann als eine lineare Combination der m unabhängigen Gleichungen, so können wir als Werthe für μ statt der Reihe $1, 2, \ldots, m$ die Reihe $1, 2, \ldots, k$ nehmen.

Da m von den die n Grössen ξ verbindenden Systemen von einander unabhängig sind, so giebt es $n - m$ wesentlich verschiedene Systeme*) von Lösungen und daher $n - m$ verschiedene Differential-

*) Wenn $P_{\lambda,1}, \ldots, P_{\lambda,n}$ $(\lambda = 1, \ldots, n - m)$ $n - m$ neue Grössensysteme von solcher Beschaffenheit sind, dass die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_{1,1}, & \ldots, & X_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{m,1}, & \ldots, & X_{m,n} \\ P_{1,1}, & \ldots, & P_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{n-m,1}, & \ldots, & P_{n-m,n} \end{vmatrix}$$

gleichungen von der Form $\Xi(f) = 0$. Da m Functionen f und $n - m$ lineare Differentialgleichungen in den n Variablen vorhanden sind, so ist dieses System partieller Differentialgleichungen vollständig, und die Bedingungen für dieses Vollständigsein sind die Bedingungen für das Vollständigsein der unabhängigen Gleichungen des ursprünglichen Systems.

Es seien $u_1, \ldots, u_n$; $v_1, \ldots, v_n$ irgend zwei Lösungssysteme der Grössen ξ und

$$U(f) = 0, \qquad V(f) = 0$$

seien die entsprechenden Differentialgleichungen. Dann sind die erforderlichen Bedingungen die, dass für jedes mögliche Paar die Gleichungen

$$U\{V(f)\} = V\{U(f)\}$$

entweder identisch oder infolge der $n - m$ Differentialgleichungen $\Xi(f) = 0$ erfüllt sind. Nun ist:

$$\begin{aligned} U\{V(f)\} - V\{U(f)\} &= \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{n}\left(u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \end{aligned}$$

und dieses muss verschwinden. Da das System der partiellen Differentialgleichungen vollständig und jede Gleichung des Systems linear und homogen in den partiellen Differentialcoefficienten ist, so folgt, dass es irgend eine Lösung der die Grössen ξ bestimmenden Gleichungen von solcher Beschaffenheit geben muss, dass

$$w_j = \sum_{i=1}^{n}\left(u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

ist für $j = 1, \ldots, n$; und die Gleichungen, welche sich aus dieser Bedingung für alle Werthe von j und für alle möglichen Paare von verschiedenen Lösungssystemen ergeben, sind hinreichend dafür, dass

---

nicht verschwindet, dann ist ein System von Lösungen gegeben durch

$$\xi_1 : \cdots : \xi_n = \frac{\partial \Delta}{\partial P_{\lambda,1}} : \cdots : \frac{\partial \Delta}{\partial P_{\lambda,n}}$$

und die $n - m$ allen möglichen Werthen von λ entsprechenden Systeme sind verschieden.

das System vollständig ist. Nun haben wir nach der Definition der Grössen w_j für alle Werthe von μ die Relation:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{\mu,j} w_j = 0$$

und daher für alle Werthe $1, \ldots, k$ von μ die Relationen:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{\mu,j} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{\mu,j} v_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i},$$

wo allerdings die Gleichungen für $\mu = m + 1, m + 2, \ldots, k$ in diesem System überflüssig sind. Aber auch

$$\sum_{j=1}^{n} X_{\mu,j} v_j = 0,$$

daher:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{\mu,j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = - \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial X_{\mu,j}}{\partial x_i}$$

und analog:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{\mu,j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = - \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial X_{\mu,j}}{\partial x_i}.$$

Demnach sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen in dem Gleichungssysteme enthalten

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i v_j \frac{\partial X_{\mu,j}}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_j v_i \frac{\partial X_{\mu,j}}{\partial x_i}$$

und schliesslich in dem folgenden:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i v_j \left(\frac{\partial X_{\mu,j}}{\partial x_i} - \frac{\partial X_{\mu,i}}{\partial x_j} \right) = 0,$$

wo μ die Werthe $1, 2, \ldots, k$ besitzt (einige dieser Gleichungen sind überflüssig, weil von einander nicht unabhängig) und für u und v sämmtliche Paare von verschiedenen Lösungen der Gleichungen

$$X_{\mu,1} \xi_1 + \cdots + X_{\mu,n} \xi_n = 0$$

für die Werthe $1, 2, \ldots, k$ von μ zu nehmen sind.

Beispiel. Als Erläuterung zu diesen Resultaten (in Bezug auf weitere Einzelheiten über dieselben vergleiche man die erwähnte Abhandlung von Frobenius) betrachten wir das Gleichungssystem:

$$a_{i,1} dx_1 + a_{i,2} dx_2 + \cdots + a_{i,n} dx_n = 0$$
$$(i = 1, \ldots, n),$$

so dass also das k der vorhergehenden Untersuchung hier gleich n ist. Wir nehmen an, dass die Grössen $a_{i,j}$ aus n Functionen $P_1, \ldots, P_n$ mittels der Gleichungen

$$a_{i,j} = \frac{\partial P_i}{\partial x_j} - \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$$

abgeleitet seien, und ferner, wie oben, dass die Unterdeterminanten von der Ordnung m ($< n$) der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

nicht sämmtlich verschwinden, dagegen alle Unterdeterminanten von höherer Ordnung als m verschwinden.

Dafür, dass dieses System von m unabhängigen Gleichungen vollständig sei, sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, dass die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i v_j \left(\frac{\partial a_{\mu,j}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{\mu i}}{\partial x_j} \right) = 0$$

erfüllt sind für alle Werthe $\mu = 1, \ldots, n$ und für alle Systeme von Grössen, welche den Gleichungen (von denen m unabhängig sind)

$$\sum_{r=1}^{n} a_{\mu,r} \xi_r = 0$$

gemäss bestimmt sind. Da

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j = 0,$$

so haben wir

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{i,j}}{\partial x_\mu} v_j + \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial v_j}{\partial x_\mu} = 0,$$

und daher, wenn wir mit u_i multipliciren, dann summiren und uns erinnern, dass für jeden Werth von j

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i.j} u_i = 0$$

ist:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i v_j \frac{\partial a_{i,j}}{\partial x_\mu} = 0,$$

oder, da

$$\frac{\partial a_{i,j}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial a_{j,\mu}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{\mu,i}}{\partial x_j} = 0$$

ist, so sind die oben als nothwendig erwiesenen Bedingungen sämmtlich erfüllt, und somit ist das System ein vollständiges System.

§ 32.

Die Integration der Gleichungen unter der Voraussetzung, dass die Bedingungen erfüllt sind, kann auf die vorausgehende Untersuchung (§§ 27—30) gegründet werden. Eine Methode folgt derselben direct und ist daher eine Verallgemeinerung von Euler's Methode; eine andere Methode kommt nach Einführung einer Modification auf Natani's Methode hinaus.

Bei der ersten Methode nehmen wir zunächst alle Veränderlichen ausser x_1 als constant an und integriren die Gleichungen

$$du_r = U_{r,1} dx_1 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

in der Form:

$$\xi_r = \text{const.} = v_r(x_2, \ldots, x_m),$$

wo v_r eine unbekannte Function ist. Werden diese Werthe von ξ substituirt, so werden die Gleichungen von der Form

$$dv_r = \sum_{t=2}^{m} V_{r,t} dx_t,$$

wo $V_{r,t}$ nicht x_1 enthält. Die analoge Transformation wird auf das neue System angewandt, um die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen um eine Einheit zu verringern, und so fort, bis das Integral erhalten wird.

Beispiel 1. Zu integriren seien die Gleichungen:

$$(v - u)du = (1 - uy)dx + (1 - ux)dy$$
$$(v - u)dv = (vy - 1)dx + (vx - 1)dy.$$

Die beiden nothwendigen Bedingungen sind erfüllt. Verfährt man wie angegeben, so hat man zwei unabhängige Integrale der Gleichungen

$$(v - u)du = (1 - uy)dx$$
$$(v - u)dv = (vy - 1)dx$$

unter der Voraussetzung, dass y constant ist, zu suchen. Wir finden dieselben in

$$u + v = xy + \vartheta$$
$$uv = x + \varphi,$$

wo nun ϑ und φ, die Integrationsconstanten, zu Functionen von y gemacht werden. Alsdann ist:

$$\begin{aligned} d\vartheta &= du + dv - ydx - xdy \\ &= 0, \end{aligned}$$

wenn man für du und dv ihre Werthe aus den ursprünglichen Gleichungen einsetzt; und

$$\begin{aligned} d\varphi &= udv + vdu - dx \\ &= dy, \end{aligned}$$

nach der nämlichen Substitution. Daher

$$\vartheta = \alpha$$

$$\varphi = y + \beta,$$

wo α und β Constanten sind. Somit ist das dem gegebenen System von Differentialgleichungen äquivalente Integralsystem:

$$u + v - xy = \alpha$$

$$uv - x - y = \beta.$$

Offenbar ist jede Function von $u + v - xy$ und $uv - x - y$ eine Lösung der gegebenen Gleichungen, d. h. ihre Variation ist Null infolge der Differentialgleichungen.

Beispiel 2. Das System

$$\frac{(u-v)(u-w)\,du}{(ux-1)(uy-1)(uz-1)} = \frac{dx}{ux-1} + \frac{dy}{uy-1} + \frac{dz}{uz-1}$$

$$\frac{(v-u)(v-w)\,dv}{(vx-1)(vy-1)(vz-1)} = \frac{dx}{vx-1} + \frac{dy}{vy-1} + \frac{dz}{vz-1}$$

$$\frac{(w-u)(w-v)\,dw}{(wx-1)(wy-1)(wz-1)} = \frac{dx}{wx-1} + \frac{dy}{wy-1} + \frac{dz}{wz-1}$$

wird in ähnlicher Weise gelöst und zwar findet man:

$$\text{const.} = uvw - x - y - z$$

$$\text{const.} = uv + vw + wu - xy - yz - zx$$

$$\text{const.} = u + v + w - xyz.$$

§ 33.

Die andere Methode ist die von Natani gegebene*). Dieselbe ist die natürliche Verallgemeinerung seiner auf den Fall einer einzigen Gleichung bezüglichen Methode und steht mit der Verallgemeinerung der Euler'schen Methode in demselben Zusammenhange,

*) Crelle's J. Bd. 58, S. 303.

wie seine frühere Methode mit der Euler'schen Methode (vgl. Beispiel 2, § 19) und kann in ähnlicher Weise dargestellt werden.

Beispiel. Das allgemeine Verfahren wird genügend deutlich werden, wenn wir ein System von Gleichungen

$$(a) \begin{cases} du = Udx + U'dy + U''dz \\ dv = Vdx + V'dy + V''dz \\ dw = Wdx + W'dy + W''dz, \end{cases}$$

das wir als integrabel voraussetzen, betrachten. Wir geben nachstehend nur Natani's Methode; die Möglichkeit ihrer Anwendung bei jedem aufeinanderfolgenden Schritte ist implicite in der früheren Untersuchung begründet.

Die Integrale von

$$du = Udx, \quad dv = Vdx, \quad dw = Wdx$$

unter der Voraussetzung, dass y und z constant sind, sind von der Form

$$(a') \begin{cases} \varphi(u, v, w, x, y, z) = \text{const.} = \varrho(y, z) \\ \psi(u, v, w, x, y, z) = \text{const.} = \sigma(y, z) \\ \chi(u, v, w, x, y, z) = \text{const.} = \tau(y, z), \end{cases}$$

wo die Functionen ϱ, σ, τ aus dieser ersten Integration zwar nicht ableitbar, die Formen φ, ψ, χ jedoch bekannt sind. Wenn jedoch die Werthe von ϱ, σ, τ bekannt sind, so bilden die vorstehenden Gleichungen das äquivalente Integral zu dem gegebenen System von Differentialgleichungen.

Da die drei Functionen auf der rechten Seite nicht x enthalten, so werden ihr Werth und ihre Form nicht geändert, wenn man x irgend einen besonderen Werth, z. B. den Werth 0 beilegt. Sind u_1, v_1, w_1 die entsprechenden Werthe von u, v, w, so hat man:

$$(a'') \begin{cases} \varphi(u, v, w, x, y, z) = \varphi(u_1, v_1, w_1, 0, y, z) \\ \psi(u, v, w, x, y, z) = \psi(u_1, v_1, w_1, 0, y, z) \\ \chi(u, v, w, x, y, z) = \chi(u_1, v_1, w_1, 0, y, z), \end{cases}$$

und die Gleichungen, welche u_1, v_1, w_1 bestimmen, sind

$$(b) \begin{cases} du_1 = U_1'dy + U_1''dz \\ dv_1 = V_1'dy + V_1''dz \\ dw_1 = W_1'dy + W_1''dz, \end{cases}$$

wo die Coefficienten diejenigen Werthe der ursprünglichen Coefficienten sind, welche man erhält, wenn man $u = u_1$, $v = v_1$, $w = w_1$, $x = 0$ substituirt.

Die Integrale von

$$du_1 = U_1'dy, \quad dv_1 = V_1'dy, \quad dw_1 = W_1'dy$$

unter der Voraussetzung, dass z constant ist, seien:

$$(b') \quad \begin{cases} \xi(u_1, v_1, w_1, y, z) = \text{const.} = \lambda(z) \\ \eta(u_1, v_1, w_1, y, z) = \text{const.} = \mu(z) \\ \zeta(u_1, v_1. w_1, y, z) = \text{const.} = \nu(z), \end{cases}$$

wo die Functionen λ, μ, ν durch diese Integration zwar nicht erhalten werden, die Formen von ξ, η, ζ aber bekannt sind. Da diese drei Functionen nicht y enthalten, so bleiben sie ungeändert, wenn man y irgend einen speciellen Werth, etwa den Werth 0, beilegt. Sind u_2, v_2, w_2 die entsprechenden Werthe von u_1, v_1, w_1, so hat man:

$$(b'') \quad \begin{cases} \xi(u_1, v_1, w_1, y, z) = \xi(u_2, v_2, w_2, 0, z) \\ \eta(u_1, v_1, w_1, y, z) = \eta(u_2, v_2, w_2, 0, z) \\ \zeta(u_1, v_1, w_1, y, z) = \zeta(u_2, v_2, w_2, 0, z), \end{cases}$$

und die Gleichungen, welche u_2, v_2, w_2 bestimmen, sind:

$$(c) \qquad du_2 = U_2''dz, \quad dv_2 = V_2''dz, \quad dw_2 = W_2''dz,$$

wo die Coefficienten die Werthe von U_1'', V_1'', W_1'' sind, welche man erhält, wenn man $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$, $w_1 = w_2$, $y = 0$ setzt, d. h. die Werthe der ursprünglichen Coefficienten U'', V'', W'', welche sich aus der Substitution $u = u_2$, $v = v_2$, $w = w_2$, $x = 0$, $y = 0$ ergeben.

Die Integrale von (c) sind von der Form:

$$\begin{cases} \alpha(u_2, v_2, w_2, z) = \alpha \\ \beta(u_2, v_2, w_2, z) = \beta \\ \gamma(u_2, v_2, w_2, z) = \gamma, \end{cases}$$

wo die Grössen rechts Constanten sind. Aus diesen Gleichungen bestimmen wir u_2, v_2, w_2 als Functionen von z. Werden diese dann in (b'') substituirt, so erhalten wir durch Vergleichung mit (b') die Werthe von $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\nu(z)$.

Wir benutzen nunmehr (b') zur Bestimmung von u_1, v_1, w_1 als Functionen von y und z. Werden dann diese Werthe in (a'') substituirt, so erhalten wir durch Vergleichung mit (a') die Werthe von $\varrho(y, z)$, $\sigma(y, z)$, $\tau(y, z)$. Alsdann stellen die Gleichungen (a') das zum System (a) gehörige Integralsystem dar.

Wenden wir dieses auf die Integration des speciellen Beispiels 1 in § 32 an, so giebt die erste Integration:

$$u + v - xy = \text{Function von } y = u_1 + v_1$$
$$uv - x \;= \text{Function von } y = u_1 v_1,$$

wenn man $x = 0$ setzt; und v_1 und u_1 werden bestimmt durch

$$(v_1 - u_1)\,du_1 = dy$$
$$(v_1 - u_1)\,dv_1 = -dy,$$

somit:

$$u_1 + v_1 = \alpha$$
$$u_1 v_1 - y = \beta.$$

Hieraus:

$$u + v - xy = \alpha$$
$$uv - x = y + \beta,$$

welches dieselbe Lösung ist, wie früher.

Aufgabe 1. Man integrire das System von Gleichungen:

$$du_1 = u_1 \frac{-2x_1 + x_2 + a}{(x_1 - x_2)(x_1 - a)}\,dx_1 + u_2 \frac{a - x_2}{(x_1 - x_2)(x_1 - a)}\,dx_2$$
$$du_2 = u_1 \frac{a - x_1}{(x_2 - x_1)(x_2 - a)}\,dx_1 + u_2 \frac{-2x_2 + x_1 + a}{(x_2 - x_1)(x_2 - a)}\,dx_2$$
$$du_3 = u_1 \frac{x_2 - x_1}{(a - x_1)(a - x_2)}\,dx_1 + u_2 \frac{x_1 - x_2}{(a - x_1)(a - x_2)}\,dx_2$$

(Maximowitch).

Aufgabe 2. Man integrire das simultane System totaler Differentialgleichungen

$$dz_1 = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}\,[z_1(-2x_1 + x_2 + x_3)\,dx_1 + z_2(x_3 - x_2)\,dx_2 + z_3(x_2 - x_3)\,dx_3]$$
$$dz_2 = \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}\,[z_1(x_3 - x_1)\,dx_1 + z_2(-2x_2 + x_1 + x_3)\,dx_2 + z_3(x_1 - x_3)\,dx_3]$$
$$dz_3 = \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}\,[z_1(x_2 - x_1)\,dx_1 + z_2(x_1 - x_2)\,dx_2 + z_3(-2x_3 + x_1 + x_2)\,dx_3]$$

(Maximowitch).

Aufgabe 3. Man integrire die (exacten) Gleichungen:

$$du = (u + x)\,dx + (v + y + 1)\,dy + (w + z + 1)\,dz$$
$$dv = (v + y + 1)\,dx + (w + z)\,dy + (w + x + 1)\,dz$$
$$dw = (w + z + 1)\,dx + (u + x + 1)\,dy + (v + y)\,dz$$

und ebenso:

$$du = u\,dx + v\,dy + w\,dz$$
$$dv = v\,dx + w\,dy + u\,dz$$
$$dw = w\,dx + u\,dy + v\,dz$$

(Stodockiewicz).

Aufgabe 4. Man integrire die simultanen Gleichungen

$$dy_1 = (a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2)dx_1 + (a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2)dx_2$$
$$dy_2 = (b_{1,1}y_1 + b_{1,2}y_2)dx_1 + (b_{2,1}y_1 + b_{2,2}y_2)dx_2,$$

wo die Grössen a und b Functionen von x_1 und x_2 sind, welche den für die Integration nothwendigen Bedingungen genügen sollen.

(Le Pont).

§ 34.

Eine sehr bemerkenswerthe Darlegung der Natani'schen Integrationsmethode hat Mayer gegeben*).

Wie in § 33 angegeben, erfordert Natani's Methode, wenn dieselbe auf das allgemeine System integrabler Gleichungen (I) angewendet wird, die Integration von m verschiedenen Systemen von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, und die aufeinanderfolgenden Systeme werden erhalten durch Annahme besonderer Werthe für diejenigen der Variablen, deren Variationen nicht mehr vorkommen. Mayer's Methode erfordert die Integration nur eines einzigen Systems von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Im § 33 wurde (der Erläuterung wegen) Null als geeigneter Werth für jede der Veränderlichen angenommen, sobald ihre Variation nicht mehr vorkam. Allgemeiner nehmen wir jetzt an, dass den unabhängigen Veränderlichen in den Gleichungen

$$\text{(I)} \qquad du_r = \sum_{t=1}^{m} U_{r,t}\, dx_t$$

nach der Integration eines jeden der aufeinanderfolgenden Systeme von gewöhnlichen Gleichungen die Werthe $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, $x_3 = \alpha_3, \ldots$ beigelegt werden.

Die unabhängigen Veränderlichen werden gegen irgend ein System von m unabhängigen Grössen $y_1, \ldots, y_m$ mittels der Gleichungen

$$x_t = \alpha_t + (y_1 - \vartheta) f_t$$

ausgetauscht, wo $f_1, \ldots, f_m$ m unabhängige Functionen der neuen Variablen y sind und ϑ eine Constante ist. Wird die Substitution in dem System (I) ausgeführt, so nimmt dasselbe die Form an:

---

*) Math. Annal. Bd. 5 (1872), S. 449—470: „Ueber simultane, totale und partielle Differentialgleichungen", besonders § 3.

$$(\text{I}') \qquad du_r = \sum_{s=1}^{m} Y_{r,s}\, dy_s\,,$$

worin

$$Y_{r,1} = \sum_{t=1}^{m} U_{r,t} \left\{ f_t + (y_1 - \vartheta) \frac{\partial f_t}{\partial y_1} \right\}$$

$$Y_{r,s} = (y_1 - \vartheta) \sum_{t=1}^{m} U_{r,t} \frac{\partial f_t}{\partial y_s}$$

ist. Man darf erwarten, dass das System (I′), welches bloss eine Transformation von (I) ist, allen Integrabilitätsbedingungen genügt, und man beweist leicht, dass

$$\frac{\partial Y_{r,t}}{\partial y_s} - \frac{\partial Y_{r,s}}{\partial y_t} + \sum_{p=1}^{n} \left(Y_{p,s} \frac{\partial Y_{r,t}}{\partial u_p} - Y_{p,t} \frac{\partial Y_{r,s}}{\partial u_p} \right)$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial x_\lambda}{\partial y_s} \frac{\partial x_\mu}{\partial y_t} \left[\frac{\partial U_{r,\mu}}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial U_{r,\lambda}}{\partial x_\mu} \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{n} \left(U_{p,\lambda} \frac{\partial U_{r,\mu}}{\partial u_p} - U_{p,\mu} \frac{\partial U_{r,\lambda}}{\partial u_p} \right) \right] = 0$$

ist infolge der als erfüllt vorausgesetzten Integrabilitätsbedingungen von (I).

Indem wir mit dem transformirten System (I′) wie bei Natani's Methode verfahren, integriren wir zunächst das System von n Differentialgleichungen

$$(A) \qquad du_s = Y_{s,1}\, dy_1 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

unter der Annahme, dass $y_2, \ldots, y_m$ unveränderlich seien. Ihre Integrale sind von der Form:

$$\varphi_r(u_1, \ldots, u_n, y_1, \ldots, y_m) = \lambda_r\,,$$

wo λ_r, eine Integrationsconstante, unabhängig von y_1 ist und eine Function von $y_2, \ldots, y_m$ sein kann. Der Werth von λ_r wird daher nicht geändert, wenn wir y_1 irgend einen speciellen Werth beilegen. Ist ϑ der y_1 beigelegte Werth und nehmen wir an, dass die Werthe von $u_1, \ldots, u_n$ sich in $u_1', \ldots, u_n'$ geändert haben, so ist:

$$\varphi_r(u_1', \ldots, u_n', \vartheta, y_2, \ldots, y_m) = \lambda_r\,,$$

so dass das System von n Integralen von der Form ist:

$$\varphi_r(u_1, \ldots, u_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = \varphi_r(u_1', \ldots, u_n', \vartheta, y_2, \ldots, y_m)\,.$$

Nun müssen die Grössen u' gefunden werden. Dieselben sind, wie in § 33, bestimmt durch n Gleichungen

$$du_r' = \sum_{s=2}^{m} Y'_{r,s} dy_s,$$

wo $Y'_{r,s}$ der Werth von $Y_{r,s}$ ist, nachdem die Substitutionen $u_t = u_t'$, $y_1 = \vartheta$ gemacht sind. Infolge dieser Substitutionen aber verschwinden die $Y_{r,s}$, so dass sämmtliche Coefficienten $Y'_{r,s}$ gleich Null sind. Demnach werden die Gleichungen, welche die Grössen u' bestimmen:

$$du_r' = 0,$$

d. h. sämmtliche Grössen u' sind constant. Somit ist das System von Integralen des transformirten Systems (I′):

$$(B) \qquad \varphi_r(u_1, \ldots, u_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = \varphi_r(c_1, \ldots, c_n, \vartheta, y_2, \ldots, y_m),$$

wobei die Functionen φ durch Integration der Gleichungen (A), die einzige jetzt erforderliche Integration, bestimmt sind.

Um ein System von Integralen des Systems (I) zu erhalten, haben wir bloss die Grössen y aus den Gleichungen (B) mittels der Transformationsgleichungen

$$x_t = \alpha_t + (y_1 - \vartheta) f_t$$

zu eliminiren. Willkürliche Constanten sind in genügender Zahl vorhanden, um das Resultat zu einem Integralsystem der Gleichungen (1) zu machen.

§ 35.

Um die Integration der Gleichungen (A) so leicht als möglich zu machen, wird man natürlich die einfachsten Transformationsgleichungen, die zugleich völlige Allgemeinheit haben, anwenden. Diese sind offenbar

$$x_1 = y_1$$

und

$$x_r = \alpha_r + (y_1 - \alpha_1) y_r$$

für $r = 2, 3, \ldots, m$. Für diese Relationen werden die Coefficienten Y:

$$Y_{r,1} = U_{r,1} + \sum_{t=2}^{m} y_t U_{r,t}$$

$$Y_{r,i} = (y_1 - \alpha_1) U_{r,i} \qquad (i = 2, \ldots, m).$$

In manchen Fällen besitzt das System von Integralen eine einfache Eigenschaft. Wenn es möglich ist, die Variablen y aus der Function φ_r zu eliminiren und eine Function

$$\psi_r(u_1, \ldots, u_n, x_1, \ldots, x_m)$$

zu erhalten, welche für die dem Werthe $y_1 = \vartheta$ entsprechenden Werthe

der x nicht unbestimmt wird, so nimmt das Integral eine einfache Form an. Der $y_1 = \vartheta$ entsprechende Werth von x_t ist α_t; demnach ist der bestimmte Werth von ψ_r für $y_1 = \vartheta$, $u_1 = c_1, \ldots, u_n = c_n$:

$$\psi_r(c_1, \ldots, c_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m),$$

welches somit der Werth von $\varphi_r(c_1, \ldots, c_n, \vartheta, y_2, \ldots, y_m)$ ist. Somit ergiebt sich, dass, wenn der Werth der rechten Seite des Integrals (B) die Form

$$\psi_r(c_1, \ldots, c_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$$

annimmt, also eine blosse Constante ist, alsdann das Integral selbst gegeben ist durch:

$$\psi_r(u_1, \ldots, u_n, x_1, \ldots, x_m) = \psi_r(c_1, \ldots, c_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m).$$

Es muss aber bemerkt werden, dass dieses Resultat in der vorliegenden Form nur gilt für alle Integrale (B), welche so beschaffen sind, dass die Function φ_r durch die Substitutionen $y_1 = \vartheta$, $u = c$ auf eine Constante reducirt wird. Wir geben hier ein Beispiel, bei welchem dies zutrifft; später werden wir ein anderes Beispiel geben, bei welchem diese Eigenschaft nicht stattfindet.

Beispiel. Zur Erläuterung des Mayer'schen Satzes betrachten wir die Gleichungen

$$(vy - ux)du = (u^2 + y^2)dx + (uv + xy)dy$$
$$(ux - vy)dv = (uv + xy)dx + (v^2 + x^2)dy,$$

welche den Integrabilitätsbedingungen genügen. In Gemässheit des auf die einfachste Substitution bezüglichen Resultats von Mayer lassen wir x ungeändert und setzen

$$y = \beta + (x - \alpha)z;$$

alsdann ist das System von Hülfsgleichungen (A):

$$[v\{\beta + (x - \alpha)z\} - ux]du$$
$$= \{u(u + vz) + (\beta - \alpha z + xz)(\beta - \alpha z + 2xz)\}dx$$
$$-[v\{\beta + (x - \alpha)z\} - ux]dv$$
$$= \{v(u + vz) + (\beta - \alpha z + 2xz)x\}\, dx.$$

Zwei Integrale dieser Gleichungen erhält man leicht (z ist unveränderlich), wenn man sie in der Form schreibt:

$$vdu + udv = (\beta - \alpha z + 2xz)dx$$
$$xdu + (\beta - \alpha z + xz)dv = -(u + vz)\, dx.$$

Die erste giebt:

$$uv - (\beta - \alpha z)x - x^2 z = c_1 c_2 - \alpha\beta,$$

wenn man $x = \alpha$ setzt. Hieraus schliessen wir, dass das Integral ist:

$$uv - xy = c_1 c_2 - \alpha\beta = \text{const.}$$

Die zweite giebt:

$$xu + (\beta - \alpha z)v + zxv = \alpha c_1 + \beta c_2,$$

wenn man $x = \alpha$ und natürlich wie vorher $u = c_1$, $v = c_2$ setzt. Hieraus schliessen wir, dass das Integral ist:

$$xu + yv = \alpha c_1 + \beta c_2 = \text{const.}$$

Demnach sind die Integrale:

$$uv - xy = \text{const.}$$
$$xu + yv = \text{const.}$$

§ 36.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Gleichungen

$$du_1 = X_1 dx + Y_1 dy$$
$$du_2 = X_2 dx + Y_2 dy$$

durch ein System von zwei Integralgleichungen befriedigt werden können, sind (nach § 30):

$$\frac{\partial X_1}{\partial y} - \frac{\partial Y_1}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial X_1}{\partial u_1} - X_1 \frac{\partial Y_1}{\partial u_1} + Y_2 \frac{\partial X_1}{\partial u_2} - X_2 \frac{\partial Y_1}{\partial u_2} = 0$$
$$\frac{\partial X_2}{\partial y} - \frac{\partial Y_2}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial X_2}{\partial u_1} - X_1 \frac{\partial Y_2}{\partial u_1} + Y_2 \frac{\partial X_2}{\partial u_2} - X_2 \frac{\partial Y_2}{\partial u_2} = 0.$$

Es ist interessant zu sehen, wie diese Bedingungen entstehen, wenn ein System von integrirenden Factoren (§ 24) eingeführt wird. Das Verfahren führt in diesem besonderen Falle zu einer Auflösungsmethode, welche von den vorhergehenden verschieden ist.

Es seien λ und μ ein System integrirender Factoren, so dass

$$\lambda(-du_1 + X_1 dx + Y_1 dy) + \mu(-du_2 + X_2 dx + Y_2 dy) = d\varphi$$

ist. Dann hat man:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = -\lambda$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = -\mu$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lambda X_1 + \mu X_2$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \lambda Y_1 + \mu Y_2.$$

Hieraus erhalten wir die Bedingungen:

$$0 = \frac{\partial \lambda}{\partial u_2} - \frac{\partial \mu}{\partial u_1}$$

$$0 = \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_1}(\lambda X_1 + \mu X_2)$$

$$0 = \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial u_1}(\lambda Y_1 + \mu Y_2)$$

$$0 = \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_2}(\lambda X_1 + \mu X_2)$$

$$0 = \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial u_2}(\lambda Y_1 + \mu Y_2)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}(\lambda X_1 + \mu X_2) - \frac{\partial}{\partial x}(\lambda Y_1 + \mu Y_2).$$

Aus den drei ersten von diesen ergiebt sich:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} + X_2 \frac{\partial \lambda}{\partial u_2} = -\lambda \frac{\partial X_1}{\partial u_1} - \mu \frac{\partial X_2}{\partial u_1}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} + Y_1 \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} + Y_2 \frac{\partial \lambda}{\partial u_2} = -\lambda \frac{\partial Y_1}{\partial u_1} - \mu \frac{\partial Y_2}{\partial u_1},$$

und aus den drei letzten kann man $\frac{\partial \mu}{\partial x}, \frac{\partial \mu}{\partial y}, \frac{\partial \mu}{\partial u_2}$ eliminiren, wodurch man erhält:

$$X_1\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} + Y_2 \frac{\partial \lambda}{\partial u_2}\right) - Y_1\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + X_2 \frac{\partial \lambda}{\partial u_2}\right)$$

$$= \lambda\left(\frac{\partial Y_1}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y} + X_2 \frac{\partial Y_1}{\partial u_2} - Y_2 \frac{\partial X_1}{\partial u_2}\right)$$

$$+ \mu\left(\frac{\partial Y_2}{\partial x} - \frac{\partial X_2}{\partial y} + X_2 \frac{\partial Y_2}{\partial u_2} - Y_2 \frac{\partial X_2}{\partial u_2}\right).$$

Wird dieses mit den vorhergehenden beiden Gleichungen verbunden, so folgt:

$$0 = \lambda\left(\frac{\partial Y_1}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y} + X_2 \frac{\partial Y_1}{\partial u_2} - Y_2 \frac{\partial X_1}{\partial u_2} + X_1 \frac{\partial Y_1}{\partial u_1} - Y_1 \frac{\partial X_1}{\partial u_1}\right)$$

$$+ \mu\left(\frac{\partial Y_2}{\partial x} - \frac{\partial X_2}{\partial y} + X_2 \frac{\partial Y_2}{\partial u_2} - Y_2 \frac{\partial X_2}{\partial u_2} + X_1 \frac{\partial Y_2}{\partial u_1} - Y_1 \frac{\partial X_2}{\partial u_1}\right).$$

Nun kann das Verhältniss $\frac{\lambda}{\mu}$ nicht eine für alle Lösungen gleiche Grösse sein, denn sonst würde sein:

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}} = \text{diesem unveränderlichen Verhältniss} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial u_2}}{\frac{\partial \psi}{\partial u_1}},$$

d. h. die Jacobi'schen Determinanten von φ und ψ würden verschwinden und jedes Integral würde dann ausdrückbar sein durch ein einziges, insofern als die abhängigen Veränderlichen vorkommen können. Dem-

nach ist die vorstehende Gleichung für $\frac{\lambda}{\mu}$ keine bestimmte, d. h. die Coefficienten von λ und μ müssen verschwinden. Dies sind die beiden Bedingungen dafür, dass das Integraläquivalent des gegebenen Systems aus zwei Gleichungen besteht.

Ferner sind die beiden einzigen unabhängigen Gleichungen, die aus den vorigen erhältlich und frei von den Differentialquotienten von μ sind, die folgenden:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} + X_2 \frac{\partial \lambda}{\partial u_2} = -\lambda \frac{\partial X_1}{\partial u_1} - \mu \frac{\partial X_2}{\partial u_1}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} + Y_1 \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} + Y_2 \frac{\partial \lambda}{\partial u_2} = -\lambda \frac{\partial Y_1}{\partial u_1} - \mu \frac{\partial Y_2}{\partial u_1}.$$

Die Elimination von μ führt zu einer linearen partiellen Differentialgleichung für λ; ist λ bekannt, so kann μ aus jeder dieser Gleichungen bestimmt werden.

Natürlich giebt es ein ähnliches Resultat in Bezug auf μ; die einzigen unabhängigen Gleichungen, die man frei von den Differentialquotienten von λ erhalten kann, sind die beiden:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \mu}{\partial u_1} + X_2 \frac{\partial \mu}{\partial u_2} = -\lambda \frac{\partial X_1}{\partial u_2} - \mu \frac{\partial X_2}{\partial u_2}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} + Y_1 \frac{\partial \mu}{\partial u_1} + Y_2 \frac{\partial \mu}{\partial u_2} = -\lambda \frac{\partial Y_1}{\partial u_2} - \mu \frac{\partial Y_2}{\partial u_2},$$

und aus diesen lässt sich eine analoge Folgerung ziehen.

[Ein scheinbarer Ausnahmefall tritt ein, wenn z. B. in dem ersten Paar von Gleichungen die beiden Grössen $\frac{\partial X_2}{\partial u_1}$, $\frac{\partial Y_2}{\partial u_1}$ verschwinden. Dies besagt, dass die Gleichung

$$du_2 = X_2 dx + Y_2 dy$$

nur drei Veränderliche x, y, u_2 enthält; und die Integrabilitätsbedingung ist erfüllt, so dass die Gleichung integrirt werden kann. Alsdann kann ohne weitere Berücksichtigung der Gleichungen für λ der Werth von u_2, welcher sich aus dem Integral ergiebt, in die erste Gleichung

$$du_1 = X_1 dx + Y_1 dy$$

substituirt werden, die alsdann der Integrabilitätsbedingung genügt und eine Gleichung von drei Veränderlichen ist.]

§ 37.

Die Differentialgleichung für λ ist:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial Y_2}{\partial u_1} - \frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial X_2}{\partial u_1} + \frac{\partial \lambda}{\partial u_1}\left(X_1 \frac{\partial Y_2}{\partial u_1} - Y_1 \frac{\partial X_2}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial \lambda}{\partial u_2}\left(X_2 \frac{\partial Y_2}{\partial u_1} - Y_2 \frac{\partial X_2}{\partial u_1}\right)$$
$$= \lambda \left(\frac{\partial X_2}{\partial u_1}\frac{\partial Y_1}{\partial u_1} - \frac{\partial X_1}{\partial u_1}\frac{\partial Y_2}{\partial u_1}\right)$$

und die Hülfsgleichungen zur Bestimmung ihres vollständigen Integrals sind:

$$(A) \qquad \frac{dx}{\frac{\partial Y_2}{\partial u_1}} = \frac{dy}{-\frac{\partial X_2}{\partial u_1}} = \frac{du_1}{X_1 \frac{\partial Y_2}{\partial u_1} - Y_1 \frac{\partial X_2}{\partial u_1}} = \frac{du_2}{X_2 \frac{\partial Y_2}{\partial u_1} - Y_2 \frac{\partial X_2}{\partial u_1}}$$
$$= \frac{d \log \lambda}{\frac{\partial X_2}{\partial u_1}\frac{\partial Y_1}{\partial u_1} - \frac{\partial X_1}{\partial u_1}\frac{\partial Y_2}{\partial u_1}}.$$

Das vollständige Integral ist für unsern Zweck nicht erforderlich. Ein Werth von λ bestimmt einen Werth von μ; mit einander combinirt, führen sie zu einer aus dem gegebenen System ableitbaren Integralgleichung. Analog führt ein zweiter Werth von λ zu einer zweiten Integralgleichung und durch diese beiden Integrale lassen sich sämmtliche Integrale des gegebenen Systems ausdrücken. Demnach braucht man nur zwei von einander unabhängige obigen Gleichungen genügende Werthe von λ zu haben, und je einfacher diese sind, um so einfacher wird im Allgemeinen die Integration der resultirenden integrablen Gleichung sein.

Beispiel. Die Methode wird hinreichend deutlich werden, wenn wir nochmals die Gleichungen betrachten:

$$(u_2 - u_1)du_1 = (1 - u_1 y)dx + (1 - u_1 x)dy$$
$$(u_2 - u_1)du_2 = (u_2 y - 1)dx + (u_2 x - 1)dy.$$

Es ist hier:

$$X_1 = \frac{1 - u_1 y}{u_2 - u_1}, \qquad Y_1 = \frac{1 - u_1 x}{u_2 - u_1}$$
$$X_2 = \frac{u_2 y - 1}{u_2 - u_1}, \qquad Y_2 = \frac{u_2 x - 1}{u_2 - u_1}.$$

Substituirt man diese in die Hülfsgleichungen (A), so nehmen diese die Form an:

$$\frac{dx}{u_2 x - 1} = \frac{dy}{1 - u_2 y} = \frac{du_1}{x - y} = \frac{du_2}{0} = \frac{d \log \lambda}{0}.$$

Da zwei Lösungen der λ bestimmenden Gleichung ausreichen, so nehmen wir diese in der Form:

$$\lambda = \text{const.} = 1$$
$$\lambda = u_2,$$

welches die einfachsten sind, die man aus vorstehendem System ableiten kann. Substituiren wir diese der Reihe nach in

$$\mu \frac{\partial X_2}{\partial u_1} = -\lambda \frac{\partial X_1}{\partial u_1} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} - X_1 \frac{\partial \lambda}{\partial u_1} - X_2 \frac{\partial \lambda}{\partial u_2},$$

so finden wir respective die Werthe:

$$\mu = 1$$
$$\mu = u_1,$$

so dass $\lambda = 1$, $\mu = 1$ und $\lambda = u_2$, $\mu = u_1$ die beiden Systeme von integrirenden Factoren sind, und daher erhalten wir, wenn wir

$$\lambda(du_1 - X_1 dx - Y_1 dy) + \mu(du_2 - X_2 dx - Y_2 dy) = d\varphi$$

setzen, für die beiden Fälle respective:

$$u_1 + u_2 - xy = \varphi_1$$
$$u_1 u_2 - x - y = \varphi_2.$$

Wir haben bisher nur zwei Integrale des Hülfssystems (A) erhalten. Zwei andere (welche mit den beiden $\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = 1$ und $\lambda_2 = u_2$, $\mu_2 = u_1$ ein vollständiges System von unabhängigen Integralen für λ und von daraus abgeleiteten Integralen für μ bilden) sind:

$$\lambda_3 = u_1 - xy, \qquad \lambda_4 = u_1 u_2 - x - y$$

mit den daraus abgeleiteten Werthen:

$$\mu_3 = u_2 - xy, \qquad \mu_4 = u_1 u_2 - x - y.$$

Nun zeigte die Untersuchung in § 24, dass, wenn λ_1, μ_1; λ_2, μ_2; λ', μ' Systeme von integrirenden Factoren sind, alsdann

$$\frac{\lambda_2 \mu' - \mu_2 \lambda'}{\lambda_2 \mu_1 - \mu_2 \lambda_1}, \qquad \frac{\lambda_1 \mu' - \mu_1 \lambda'}{\lambda_2 \mu_1 - \mu_2 \lambda_1}$$

Lösungen sind, vorausgesetzt, dass sie unabhängig von einander und nicht blosse Constanten sind. Ist $\mu' = \mu_3$, $\lambda' = \lambda_3$, dann werden diese Grössen respective

$$u_1 + u_2 - xy, \qquad 1,$$

so dass $u_1 + u_2 - xy$ die einzige daraus ableitbare Lösung ist. Da aber $u_1 + u_2 - xy$ und $u_1 u_2 - x - y$ functional von einander unabhängig sind, so folgt aus der allgemeinen Theorie, dass

$$u_1 + u_2 - xy = \alpha$$
$$u_1 u_2 - x - y = \beta$$

eine Lösung des gegebenen Systems von Differentialgleichungen sind.

§ 38.

Es giebt noch eine andere Methode, die Integrale zu erhalten, welche sich auf die Resultate der allgemeinen Untersuchung stützt, durch welche bewiesen wurde, dass die nothwendigen Bedingungen auch hinreichend sind. Die Integrale werden betrachtet als die gemeinschaftlichen Lösungen simultaner partieller Differentialgleichungen*), und es ist leicht zu sehen, dass das Verfahren der successiven Integration nur eine Modification der verallgemeinerten (§ 32) Euler'schen Methode ist.

Jede Lösung φ des Systems von n Gleichungen

$$\text{(I)} \qquad du_s = \sum_{t=1}^{m} U_{s,t}\, dx_t$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n)$$

genügt, wie in § 22 gezeigt wurde, den m partiellen Differentialgleichungen:

$$\text{(II)} \qquad \Delta_t \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_t} + \sum_{s=1}^{n} U_{s,t} \frac{\partial \varphi}{\partial u_s} = 0$$

$$(t = 1, 2, \ldots, m).$$

Die Jacobi'schen Bedingungen

$$(\Delta_r, \Delta_t) = 0$$

für das Zusammenbestehen des Systems (II) und der Existenz gemeinschaftlicher Lösungen für dasselbe sind:

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial u_s} \left\{ \frac{\partial U_{s,t}}{\partial x_r} - \frac{\partial U_{s,r}}{\partial x_t} + \sum_{p=1}^{n} \left(U_{p,r} \frac{\partial U_{s,t}}{\partial u_p} - U_{p,t} \frac{\partial U_{s,r}}{\partial u_p} \right) \right\} = 0.$$

Infolge der Bedingungsgleichungen (2) des § 26 zwischen den Coefficienten, die hier als erfüllt vorausgesetzt werden, verschwindet aber der Coefficient jedes Gliedes $\frac{\partial \varphi}{\partial u_s}$ und somit sind die Jacobi'schen Bedingungen erfüllt. Hiernach ist das System (II) ein solches, welches ein vollständiges System genannt zu werden pflegt.

Wir wollen nun beweisen, dass das System (II) unter diesen Voraussetzungen n unabhängige Integrale besitzt, wo n die Gesammtzahl der Veränderlichen in dem System vermindert um die Zahl der Gleichungen in dem System ist.

---

*) Boole, Phil. Trans. 1862, S. 437—454; Mayer, § 12 der oben in § 34 citirten Abhandlung.

Nehmen wir die erste Gleichung von (II), nämlich

$$\Delta_1\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + U_{1,1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} + U_{2,1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2} + \cdots + U_{n,1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_n} = 0,$$

so ist das System der Hülfsgleichungen zur Ableitung der allgemeinsten Lösung:

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{0} = \cdots = \frac{dx_m}{0} = \frac{du_1}{U_{1,1}} = \frac{du_2}{U_{2,1}} = \cdots = \frac{du_n}{U_{n,1}}.$$

Sind

$$x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_m,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$$

die $n+m-1$ von einander unabhängigen Integrale dieses Systems, so lässt sich jede Lösung von $\Delta_1\varphi = 0$ durch diese Grössen ausdrücken, und um die simultanen Lösungen von (II) zu haben, reicht es aus, diejenigen functionalen Combinationen derselben zu suchen, welche den übrigen Gleichungen $\Delta_2\varphi, \ldots, \Delta_m\varphi = 0$ genügen.

Wenn nun

$$\varphi = f(x_2, \ldots, x_m, \xi_1, \ldots, \xi_n)$$

der Gleichung $\Delta_t\varphi = 0$ genügt, so hat man:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_t} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \xi_r}\left\{\frac{\partial \xi_r}{\partial x_t} + \sum_{s=1}^{n} U_{s,t}\frac{\partial \xi_r}{\partial u_s}\right\}$$

$$\text{(II}') \qquad = \frac{\partial f}{\partial x_t} + \sum_{r=1}^{n} V_{r,t}\frac{\partial f}{\partial \xi_r},$$

wo $V_{r,t}$, die nämliche Function wie früher (§ 28), eine Function von $x_2, \ldots, x_m, \xi_1, \ldots, \xi_n$ allein ist. Dieses neue System (II′) ist in Rücksicht auf die von den Coefficienten $V_{r,t}$ erfüllten Bedingungen ein vollständiges System und die simultanen Lösungen von (II′) sind Lösungen von (II).

Wir haben daher an Stelle des vollständigen Systems von m linearen Gleichungen mit $n+m$ Variablen ein neues vollständiges System von $m-1$ linearen Gleichungen mit $n+m-1$ Variablen und sämmtliche Lösungen des zweiten Systems sind Lösungen des ersten und umgekehrt.

Das neue System wird in derselben Weise behandelt und durch ein anderes vollständiges System von $m-2$ linearen Gleichungen mit $m+n-2$ Variablen ersetzt und sämmtliche Lösungen des letzteren sind Lösungen des ersteren und daher auch von (II) und umgekehrt.

Indem wir in dieser Weise fortfahren, finden wir, dass sämmtliche Lösungen von (II) Lösungen eines aus nur einer Gleichung

bestehenden Systems mit $n+1$ Veränderlichen sind. Man weiss aber, dass eine solche Gleichung n unabhängige Lösungen hat und dass jede Lösung als Function dieser n Lösungen dargestellt werden kann; demnach besitzt das System (II) n von einander unabhängige Lösungen, und jede gemeinschaftliche Lösung kann als Function derselben dargestellt werden.

§ 39.

Um jedoch die Methode auch auf die Auflösung von (I) anwendbar zu machen, müssen wir den folgenden **Satz** beweisen, welcher die Umkehrung des Satzes am Anfang des § 22 ist:

Ein System von n unabhängigen Lösungen von (II) bildet ein den Differentialgleichungen (I) äquivalentes System von Integralgleichungen.

Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ die n von einander unabhängigen Lösungen von (II). Alsdann folgt aus den Gleichungen

$$\varphi_1 = a_1,\ \varphi_2 = a_2,\ \ldots,\ \varphi_n = a_n$$

das System der n Gleichungen:

$$\sum_{t=1}^{m} \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_t} dx_t + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \varphi_r}{\partial u_s} du_s = 0$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n).$$

Nach den Gleichungen (II) aber ist:

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_t} = -\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \varphi_r}{\partial u_s} U_{s,t},$$

so dass man durch Substitution erhält:

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \varphi_r}{\partial u_s} \left\{ du_s - \sum_{t=1}^{m} U_{s,t} dx_t \right\} = 0.$$

Dies ist für $r = 1, 2, \ldots, n$ ein System von n Gleichungen. Dasselbe ist linear und homogen in den n Grössen:

$$du_s - \sum_{t=1}^{m} U_{s,t} dx_t,$$

und die Determinante der Coefficienten dieser Grössen ist:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}.$$

Diese Determinante verschwindet nicht, da die Grössen φ von einander unabhängig sind. Somit ergiebt sich:

$$du_s - \sum_{t=1}^{m} U_{s,t} dx_t = 0$$

für $s = 1, 2, \ldots, n$. Dies ist das System (I) und dasselbe besteht in Folge der Gleichungen $\varphi_r = a_r$. Daher ist der Satz bewiesen.

Hiernach hat man nur, um ein zu (I) äquivalentes Integralsystem zu erhalten, irgend n von einander unabhängige gemeinschaftliche Integrale des Systems (II) zu suchen.

Aufgabe. Man löse die Gleichungen

$$(1 + xy)du = (v + 2x + xy)dx + (2y + x^2 - xu)dy$$
$$(1 + xy)dv = (y - vy - 2xy)dx + (x - u - 2y^2)dy,$$

bei denen die für die Integration nothwendigen Bedingungen erfüllt sind.

Ist $\varphi(x, y, u, v)$ eine Lösung, so sind die partiellen Gleichungen, welche φ bestimmen, die folgenden:

$$(1 + xy)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (v + 2x + xy)\frac{\partial\varphi}{\partial u} + (y - vy - 2xy)\frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0$$

$$(1 + xy)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (2y + x^2 - xu)\frac{\partial\varphi}{\partial u} + (x - u - 2y^2)\frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0.$$

Die Hülfsgleichungen für die Integration der ersten von ihnen sind:

$$\frac{dx}{1 + xy} = \frac{dy}{0} = \frac{du}{v + 2x + xy} = \frac{dv}{y(1 - v - 2x)}$$

und drei von einander unabhängige Integrale derselben sind:

$$y$$
$$\varrho = v + y(u - x)$$
$$\sigma = u - x(v + x),$$

und daher erhalten wir

$$\varphi = f(y, \varrho, \sigma).$$

Wird dies in die zweite Gleichung substituirt, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1 + xy)$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial \varrho}\left\{(1 + xy)\frac{\partial\varrho}{\partial y} + (2y + x^2 - xu)\frac{\partial\varrho}{\partial u} + (x - u - 2y^2)\frac{\partial\varrho}{\partial v}\right\}$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial \sigma}\left\{(1 + xy)\frac{\partial\sigma}{\partial y} + (2y + x^2 - xu)\frac{\partial\sigma}{\partial u} + (x - u - 2y^2)\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\} = 0$$

oder nach Reduction:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + 2y\frac{\partial f}{\partial \sigma} = 0.$$

Die Hülfsgleichungen für die Integration dieser Gleichung sind:

$$\frac{dy}{1} = \frac{d\varrho}{0} = \frac{d\sigma}{2y},$$

und zwei von einander unabhängige Integrale dieser sind:

$$\varrho$$

und

$$\sigma - y^2;$$

demnach:

$$f(y, \varrho, \sigma) = \psi(\varrho, \sigma - y^2),$$

wo für die allgemeinste Lösung ψ eine willkürliche Function ist.

Offenbar sind sämmtliche Lösungen mittels der beiden unabhängigen Lösungen ϱ und $\sigma - y^2$ darstellbar; demnach ist das äquivalente Integralsystem der ursprünglichen Gleichungen:

$$v + y(u - x) = \alpha$$
$$u - x(v + x) - y^2 = \beta.$$

§ 40.

Das in § 39 bezüglich der simultanen Aequivalenz der Systeme (I) und (II) bewiesene Resultat kann auch folgendermassen erhalten werden.

Jede Lösung des Systems (II) befriedigt die Gleichung

$$\mu_1\Delta_1\varphi + \mu_2\Delta_2\varphi + \cdots + \mu_m\Delta_m\varphi = 0,$$

wo die Coefficienten μ ein willkürliches System unabhängiger Functionen der Variablen sind. Nun ist eine Lösung dieser Gleichung auch eine Lösung des Hülfssystems:

$$\cdots = \frac{dx_t}{\mu_t} = \cdots = \frac{du_s}{\sum_{t=1}^{m}\mu_t U_{s,t}} = \cdots$$

und daher ist jede Lösung des Systems (II) eine Lösung dieser Hülfsgleichungen, welches auch immer die Werthe der Functionen μ sein mögen. Dieses geht nach Elimination der μ's über in das System:

$$du_s = \sum_{t=1}^{m} U_{s,t}\,dx_t,$$

d. h. in das System (I), und somit ist nach der gewöhnlichen Theorie

der partiellen Differentialgleichungen*) jede Lösung des Systems (II) eine Lösung des Systems (I).

Mit Rücksicht auf diese Aequivalenz und den Umstand, dass die partiellen Differentialgleichungen der eben betrachteten Art, d. h. solche Differentialgleichungen, welche in den Differentialquotienten homogen und linear sind, in einigen der das Pfaff'sche Problem**) behandelnden Methoden (z. B. in Clebsch's Methode) auftreten, erscheint es zweckmässig, in diesem Zusammenhange einige ihrer Eigenschaften zu discutiren. Die Anzahl der unabhängigen Lösungen eines solchen Systems ist bereits in § 37 untersucht worden, und auf diese Untersuchung gestützt, haben wir eine Methode erhalten, diese Lösungen abzuleiten. Da aber die Systeme der Gleichungen (I) und (II) äquivalent sind, so ist es natürlich zu erwarten, dass die Mayer'sche Methode für die gewöhnlichen Differentialgleichungen auf die Integration partieller Differentialgleichungen ausgedehnt werden kann. Diese Ausdehnung geschieht leicht in folgender Weise.

§ 41.

Das System der partiellen Differentialgleichungen ist:

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_t} + \sum_{s=1}^{n} U_{s,t} \frac{\partial \varphi}{\partial u_s} = 0$$

$$(t = 1, 2, \ldots, m).$$

Wir lassen die Veränderlichen u ungeändert und transformiren die Variablen x mittels der Substitutionen des § 34, nämlich

$$x_t = \alpha_t + (y_1 - \vartheta) f_t,$$

wo $f_1, \ldots, f_m$ m von einander unabhängige Functionen der neuen m

---

*) Lehrbuch, §§ 187 u. 189.

**) Eine andere wichtige Reihe solcher Gleichungen, die den hier betrachteten in der Form analog und als System vollständig sind, ist das System der charakteristischen Gleichungen für die Concomitanten der algebraischen Formen. Vergl. z. B. eine Abhandlung über „Systeme von ternären Formen, welche algebraisch vollständig sind" Americ. Journ. of Math. Bd. 12 (1889), S. 1—60 und 115—161. Die ternären Formen werden durch ein solches System von Gleichungen, acht an der Zahl, bestimmt nnd es wird daselbst (§ 18) durch von den in diesem Kapitel vorkommenden vollständig verschiedene Betrachtungen gezeigt, dass es eine Anzahl von einander functional unabhängiger Lösungen giebt, welche, wie leicht zu sehen, mit der im § 38 des Textes bestimmten Anzahl übereinstimmt.

unabhängigen Variablen $y_1, \ldots, y_m$ sind und ϑ eine Constante ist. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} &= \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y_1} \\
&= \sum_{s=1}^{m} \left\{ f_s + (y_1 - \vartheta) \frac{\partial f_s}{\partial y_1} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \\
&= - \sum_{s=1}^{m} \left\{ f_s + (y_1 - \vartheta) \frac{\partial f_s}{\partial y_1} \right\} \sum_{r=1}^{n} U_{r,s} \frac{\partial \varphi}{\partial u_r} \\
&= - \sum_{r=1}^{n} Y_{r,1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_r};
\end{aligned}$$

und für die Werthe $2, 3, \ldots, m$ von q

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial y_q} &= \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial y_q} \\
&= \quad (y_1 - \vartheta) \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial f_s}{\partial y_q} \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \\
&= - (y_1 - \vartheta) \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial f_s}{\partial y_q} \sum_{r=1}^{n} U_{r,s} \frac{\partial \varphi}{\partial u_r} \\
&= - \sum_{r=1}^{n} Y_{r,q} \frac{\partial \varphi}{\partial u_r},
\end{aligned}$$

so dass wir für alle Werthe $1, 2, \ldots, m$ von t erhalten:

$$\text{(II}') \qquad \nabla_t \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y_t} + \sum_{r=1}^{n} Y_{r,t} \frac{\partial \varphi}{\partial u_r} = 0\,.$$

Die Systeme (II) und (II′) sind einander äquivalent, und die Bedingungen der Coexistenz der Gleichungen in (II′) sind, wie in § 34 erfüllt, so dass (II′) ein vollständiges System ist.

Um (II′) zu integriren und daher die n unabhängigen Lösungen ihres Integralsystems zu erhalten, braucht man nur die n unabhängigen Integrale des äquivalenten Systems von n gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$du_r = \sum_{s=1}^{m} Y_{r,s}\, dy_s$$

zu finden. Wie wir bereits in § 34 gesehen haben, ist es für diesen Zweck hinreichend, das System der Gleichungen

$$du_r = Y_{r,1}\, dy_1$$

zu nehmen und n unabhängige Lösungen derselben in der Form zu suchen:

$$\varphi_p(u_1, \ldots, u_n, y_1, \ldots, y_m) = \text{const.},$$

indem man die Grössen $y_2, \ldots, y_m$ als unveränderlich betrachtet. Alsdann ist das System von einander unabhängiger Integrale des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\varphi_p(u_1, \ldots, u_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = \varphi_p(c_1, \ldots, c_n, \vartheta, y_2, \ldots, y_m),$$

welches daher n von einander unabhängige Lösungen des Systems (II′) sind. Das Lösungssystem von (II) kann dadurch erhalten werden, dass man die Variablen y eliminirt und dieselben durch ihre Ausdrücke in den Variablen x ersetzt; und wenn in den vorigen Gleichungen jede rechte Seite die Form $\psi_p(c_1, c_2, \ldots, c_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ annimmt, so ist das entsprechende Integral von (II):

$$\psi_p(u_1, \ldots, u_n, x_1, \ldots, x_m) = \psi_p(c_1, \ldots, c_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m).$$

Ferner sind die Gleichungen

$$\frac{du_r}{Y_{r,1}} = dy_1$$

(indem $y_2, \ldots, y_m$ als unveränderlich betrachtet werden), welche zur Herstellung der Functionen φ_p leiten, die Hülfsgleichungen für die Ableitung des allgemeinsten Integrals derjenigen Gleichung in (II′), welche durch $t = 1$ gegeben wird.

Wir erhalten somit den **Satz:**

Um ein System von n unabhängigen Lösungen des vollständigen Systems von Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_t} + \sum_{s=1}^{n} U_{s,t} \frac{\partial \varphi}{\partial u_s} = 0$$

$$(t = 1, 2, \ldots, m)$$

zu erhalten, transformiren wir die Veränderlichen x mittels der Substitutionen

$$x_t = \alpha_t + (y_1 - \vartheta) f_t(y_1, \ldots, y_m)$$

und stellen die Gleichung her:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \sum_{r=1}^{n} Y_{r,1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_r} = 0.$$

Die Hülfsgleichungen dieser, nämlich

$$dy_1 = \frac{du_1}{Y_{1,1}} = \cdots = \frac{du_n}{Y_{n,1}}$$

(in denen $y_2, \ldots, y_m$ als invariabel betrachtet werden), sind zu integriren; dieselben führen zu n Gleichungen von der Form:

$$\varphi_p(u_1, \ldots, u_n, y_1, \ldots, y_m) = \text{const.}$$

Alsdann wird das gesuchte System von Lösungen erhalten aus den n Gleichungen:

$$\varphi_p(u_1, \ldots, u_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = \varphi_p(c_1, \ldots, c_n, \vartheta, y_2, \ldots, y_m),$$

indem man die Variablen y durch ihre Ausdrücke in den urspünglichen Variablen x ersetzt; und wenn irgend eine Function $\varphi_p(c_1, \ldots, c_n, \vartheta, y_2, \ldots, y_m)$ eine blosse Constante $\psi_p(c_1, \ldots, c_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ ist, so ist die entsprechende Lösung

$$\psi_p(u_1, \ldots, u_n, x_1, \ldots, x_m) = \psi_p(c_1, \ldots, c_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m).$$

Wie vorher sind die Formen der Functionen f_t beliebig, nur dass sie der Bedingung, von einander unabhängig zu sein, unterworfen sind. Die einfachsten Substitutionen sind offenbar:

$$x_1 = y_1$$
$$x_t = \alpha_t + (y_1 - \alpha) y_t$$

und alsdann sind die in den Hülfsgleichungen vorkommenden Functionen $Y_{r,1}$:

$$Y_{r,1} = U_{r,1} + \sum_{t=2}^{m} U_{r,t} y_t.$$

Aufgabe. Man löse das System von Gleichungen:

$$p_3(x_4 - x_5) + p_1(x_5 - x_6) + p_2(x_6 - x_4) = 0$$
$$p_4(x_4 - x_5) + p_1(x_5 - x_1) + p_2(x_1 - x_4) = 0$$
$$p_5(x_4 - x_5) + p_1(x_5 - x_2) + p_2(x_2 - x_4) = 0$$
$$p_6(x_4 - x_5) + p_1(x_5 - x_3) + p_2(x_3 - x_4) = 0,$$

welche, wie leicht verificirt wird, ein vollständiges System bilden.

Um Uebereinstimmung mit der vorhergehenden Bezeichnungsweise herzustellen, setzen wir:

$$x_1 = u_1, \qquad x_4 = \alpha_2 + (y_1 - \alpha_1) y_2$$
$$x_2 = u_2, \qquad x_5 = \alpha_3 + (y_1 - \alpha_1) y_3$$
$$x_3 = y_1, \qquad x_6 = \alpha_4 + (y_1 - \alpha_1) y_4.$$

Alsdann ist:

$$\lambda U_{1,1} = x_5 - x_6, \qquad \lambda U_{2,1} = x_6 - x_4$$
$$\lambda U_{1,2} = x_5 - x_1, \qquad \lambda U_{2,2} = x_1 - x_4$$
$$\lambda U_{1,3} = x_5 - x_2, \qquad \lambda U_{2,3} = x_2 - x_4$$
$$\lambda U_{1,4} = x_5 - x_3, \qquad \lambda U_{2,4} = x_3 - x_4,$$

wo $\lambda = x_4 - x_5$ ist. Nun ist:

$$Y_{1,1} = U_{1,1} + y_2 U_{1,2} + y_3 U_{1,3} + y_4 U_{1,4}$$
$$Y_{2,1} = U_{2,1} + y_2 U_{2,2} + y_3 U_{2,3} + y_4 U_{2,4},$$

daher:

$$Y_{1,1} + Y_{2,1} = -(1 + y_2 + y_3 + y_4)$$
$$x_4 Y_{1,1} + x_5 Y_{2,1} = -(x_6 + y_2 u_1 + y_3 u_2 + y_4 y_1).$$

Da die Hülfsgleichungen sind:

$$dy_1 = \frac{du_1}{Y_{1,1}} = \frac{du_2}{Y_{2,1}},$$

worin y_2, y_3, y_4 als unveränderlich gelten, so wird ein Integral gegeben durch:

$$dy_1 = \frac{du_1 + du_2}{Y_{1,1} + Y_{2,1}} = -\frac{d(u_1 + u_2)}{1 + y_2 + y_3 + y_4}$$

und daher:

$$u_1 + u_2 + y_1(1 + y_2 + y_3 + y_4) = \text{const.}$$
$$= c_1 + c_2 + \alpha_1(1 + y_2 + y_3 + y_4).$$

Hieraus erhalten wir

$$u_1 + u_2 + y_1 + y_2(y_1 - \alpha_1) + y_3(y_1 - \alpha_1) + y_4(y_1 - \alpha_1) = c_1 + c_2 + \alpha_1$$

und daher:

$$u_1 + u_2 + x_3 + x_4 - \alpha_2 + x_5 - \alpha_3 + x_6 - \alpha_4 = c_1 + c_2 + \alpha_1.$$

Demnach ist ein Integral des Systems

$$Z_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6.$$

Ferner erhalten wir:

$$dy_1 = \frac{x_4\,du_1 + x_5\,du_2}{x_4 Y_{1,1} + x_5 Y_{2,1}} = -\frac{\{\alpha_2 + (y_1 - \alpha_1)y_2\}\,du_1 + \{\alpha_3 + (y_1 - \alpha_1)y_3\}\,du_2}{\alpha_4 + y_2 u_1 + y_3 u_2 + 2y_4 y_1 - \alpha_1 y_4}$$

und das Integral hiervon ist, wie leicht ersichtlich:

$$(\alpha_4 - \alpha_1 y_4)y_1 + y_1^2 y_4 + (y_2 u_1 + y_3 u_2)(y_1 - \alpha_1) + \alpha_2 u_1 + \alpha_3 u_2 = \text{const.}$$
$$= \alpha_4\alpha_1 + \alpha_2 c_1 + \alpha_3 c_2,$$

wenn man $y_1 = \alpha_1$ nimmt. Hiernach ist ein Integral des ursprünglichen Systems:

$$x_6 x_3 + x_5 u_2 + x_4 u_1 = \alpha_4\alpha_1 + \alpha_2 c_1 + \alpha_3 c_2$$

oder:

$$Z_2 = x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6 .$$

Nun giebt es nur zwei von einander unabhängige Integrale des ursprünglichen Systems und zwei solche sind in Z_1 und Z_2 gefunden; sonach ist die allgemeinste Lösung des ursprünglichen Systems von simultanen Gleichungen, welche möglich ist:

$$z = \varphi(Z_1, Z_2),$$

wo φ irgend eine willkürliche Function ist.

§ 42.

Die eben betrachtete Klasse von Gleichungen, d. h. in den partiellen Differentialquotienten homogene, lineare und die abhängige Veränderliche nicht explicit enthaltende Gleichungen, tritt auf in der Methode von Clebsch für die Reduction eines Differentialausdrucks auf seine Normalform sowie in der Jacobi'schen Methode für die Integration irgend einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. In jedem von diesen Fällen wird nicht sowohl das vollständige System von Lösungen als vielmehr nur eine einzige Lösung verlangt.

Wird nun irgend eine Grösse U_p, wo

$$U_p = \varphi_p(u_1, \ldots, u_n, y_1, \ldots, y_m) - \varphi_p(c_1, \ldots, c_n, \vartheta, y_2, \ldots, y_m) = 0,$$

in die transformirten Differentialgleichungen substituirt, so können dieselben entweder identisch erfüllt sein, oder infolge von $U_p = 0$ oder infolge der Gleichung $U_p = 0$ in Verbindung mit den andern Lösungen dès Integralsystems. Wenn daher $U_p = 0$ das einzige Integral des Systems ist, welches gefunden wurde, so kann es in den letzten Fällen (wenn allein genommen) nicht als ein Integral der Differentialgleichungen betrachtet werden; sie genügt denselben in der That nicht, wenn sie das einzige bekannte Integral ist.

Um diesem Mangel abzuhelfen, giebt Mayer (a. a. O. § 5) eine Methode an, um durch ein Differentiationsverfahren wenigstens eine Lösung des ursprünglichen Systems partieller Differentialgleichungen aus jedem Integral des Hülfssystems zu erhalten.

Nimmt man irgend ein Integral des Hülfssystems, etwa

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n, y_1, \ldots, y_m) = \text{const.},$$

so ist bewiesen worden, dass

$$U = \varphi(u_1, \ldots, u_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) - \varphi(c_1, \ldots, c_n, \vartheta, y_2, \ldots, y_m) = 0$$

dem Gleichungssystem (II′) des § 41

$$\nabla_t U = 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, m)$$

genügt. Von diesen ist infolge der Art der Herleitung $\nabla_1 U = 0$ identisch erfüllt. Die übrigbleibenden können identisch oder infolge der Gleichung $U = 0$ befriedigt sein, in welchem Falle U die gesuchte Lösung des Gleichungssystems ist; oder sie können befriedigt sein nur infolge anderer Gleichungen, welche mit $U = 0$ zusammen ein Integralsystem bilden.

In dem letzten Falle leiten wir durch algebraische Auflösung nach c_1 aus $U = 0$ eine neue äquivalente Gleichung

$$c_1 = U_1(u_1, \ldots, u_n, y_1, \ldots, y_m, \vartheta, c_2, \ldots, c_n)$$

her. Dann ist stets

$$\nabla_1 U_1 = 0$$

identisch erfüllt und die andern Gleichungen sind für $t = 2, \ldots, m$

$$\nabla_t U_1 = 0,$$

und diese sind durch die andern bisher noch unbekannten Gleichungen des Integralsystems zu erfüllen. Da somit sämmtliche Gleichungen $\nabla_t U_1 = 0$ nicht identisch sind und dieselben nicht c_1 enthalten, so dass sie durch $c_1 = U_1$ nicht befriedigt werden können, so sind wir im Stande, aus ihnen die Werthe einiger der Constanten c, z. B. $c_2, \ldots, c_h$ durch u und y und die übrigbleibenden Constanten c auszudrücken. Dieselben seien:

$$c_i = U_i(u_1, \ldots, u_n, y_1, \ldots, y_m, \vartheta, c_{h+1}, \ldots, c_n)$$

für $i = 2, \ldots, h$. Da diese Gleichungen die Aequivalente einiger der Integralgleichungen sind, so genügen sie dem System (II′) von Differentialgleichungen. Diese werden in derselben Weise behandelt wie die Gleichung $c_1 = U_1$ und so gehen wir weiter, bis wir entweder eine gemeinschaftliche Lösung der Gleichungen finden oder aus den nicht identisch befriedigten Gleichungen die Werthe sämmtlicher Grössen c mit Hülfe von y, u, ϑ allein darstellen können. Diese bilden, insgesammt genommen, ein Integralsystem.

Ferner aber sind, wenn irgend einer von diesen Werthen, etwa

$$c_r = U_r(u_1, \ldots, u_n, y_1, \ldots, y_m, \vartheta),$$

in die Gleichungen (II′) substituirt wird, sämmtliche Gleichungen $\nabla_t U_r = 0$ identisch erfüllt, denn keine der Constanten c geht in eine Gleichung $\nabla_t U_r = 0$ ein, so dass keine der n Gleichungen (von denen jede nur eine dieser Constanten enthält) benutzt werden kann, um $\nabla_t U_r$ verschwinden zu machen. Demnach ist jedes der Glieder der Reihe

$U_1, \ldots, U_n$ in der erhaltenen Form an sich eine Lösung sämmtlicher Differentialgleichungen.

Es folgt auf diese Weise, dass aus jedem Integral des Hülfssystems mindestens **eine** Lösung der partiellen Differentialgleichungen abgeleitet werden kann, und ihre explicite Form als Lösung des ursprünglichen Gleichungssystems (II) wird unmittelbar dadurch gegeben, dass man mit Hülfe der Substitutionsgleichungen auf die ursprünglichen Variablen zurückgeht.

Wird ferner der Veränderlichen y_1 in der Function U_r der Werth ϑ beigelegt, so wird diese Function einfach u_r, weil für diesen Werth von y_1 sich aus den Gleichungen für die Variablen $u_1, \ldots, u_n$ resp. die Werthe $c_1, \ldots, c_n$ ergeben. Die Integrale in der soeben beim Beweise des Mayer'schen Satzes angegebenen Form sind ein System sogenannter Hauptintegrale*) und die Werthe von $x_1, \ldots, x_m$ für $y_1 = \vartheta$ sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Hieraus folgt, dass es für das Differentialgleichungssystem (II) eine Reihe $U_1, \ldots, U_n$ von Hauptintegralen von der Beschaffenheit giebt, dass sie für passend gewählte constante Werthe $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ von $x_1, \ldots, x_m$ die Werthe $u_1, \ldots, u_n$ annehmen**).

§ 43.

Wenn die erste Methode von Clebsch (Kapitel 8) auf die Reduction eines keiner Bedingung unterliegenden linearen Differentialausdrucks mit $2n$ Variablen angewendet wird, so gestattet die Bestimmung jedes successiven Elements der Normalform — oder, was dasselbe ist, jedes Integrals der Pfaff'schen Gleichung —, die Anzahl der Veränderlichen in der ursprünglichen Gleichung um eine Einheit zu vermindern. Wenn daher μ Integrale gefunden sind, so sind noch $2n - \mu$ Variablen übrig, und da noch $n - \mu$ Integrale zu finden sind (d. h. der Ausdruck, welcher mit Hülfe der Integrale derart modificirt ist, dass er nur noch $2n - \mu$ Variable enthält, hat eine Normalform, die nur noch $n - \mu$ Differentialelemente enthält), so folgt (§ 122—124), dass das $\mu + 1^{\text{te}}$ Integral

$$1 + (2n - \mu) - 2(n - \mu) = \mu + 1$$

---

*) Natani, Crelle's Journ. Bd. 58, S. 302.

**) Vergl. Lie „Theorie des Pfaff'schen Problems" Arch. f. Math. og Nat. Bd. II (1877) S. 338—379, § 34. — Es mag bemerkt werden, dass die einzige Beschränkung in der Wahl der constanten Werthe von x darin besteht, dass sie nicht zu unbestimmten oder unendlichen Werthen der auftretenden Functionen führen.

Differentialgleichungen der eben betrachteten Art genügt, und diese Gleichungen enthalten die $2n - \mu$ Variablen. Demnach ist (§ 38) die Anzahl von Integralen, welche sie besitzen und die unabhängig von einander sind:

$$2n - \mu - (\mu + 1)$$

d. h. $2n - 2\mu - 1$. Was man bei der Anwendung der Mayer'schen Integrationsmethode braucht, ist nun eine einzige Lösung des zugehörigen Hülfssystems gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen, deren Anzahl gleich $2n - 2\mu - 1$ ist; demnach erfordert Mayer's Methode für die Bestimmung des $\mu + 1^{\text{ten}}$ Integrals der Pfaff'schen Gleichung nur eine einzige Lösung eines Systems von $2n - 2\mu - 1$ gewöhnlichen linearen Gleichungen erster Ordnung. Nehmen wir $\mu = 0, 1, \ldots, n - 1$ als die Werthe, welche alle Integrale geben, so folgt, dass nach Mayer's Methode das Pfaff'sche Problem vollständig gelöst ist durch Bestimmung eines einzigen Integrals eines jeden der Systeme von je

$$2n - 1,\ 2n - 3,\ \ldots,\ 3,\ 1$$

gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Aehnliche Betrachtungen bezüglich der Bestimmung der Anzahl der nothwendigen und hinreichenden Integrationen gelten, wenn Jacobi's Methode der Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung angewendet wird.

3. Kapitel.

Historische Uebersicht über die Methoden zur Behandlung des Pfaff'schen Problems.

---

§ 44.

Die bisher betrachteten totalen Differentialgleichungen sind von solcher Art, dass sie aus einer einzigen Integralgleichung hergeleitet werden können, und ihre Coefficienten genügen einer gewissen Anzahl von Bedingungen, welche nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend dafür sind, dass jene Herleitung wirklich möglich ist. Es kann aber eine Gleichung unter den kleinen Variationen der Variablen bestehen, obwohl nur einige oder auch gar keine der Bedingungen für die Möglichkeit der Herleitung aus einer einzigen Gleichung erfüllt sind, und es entsteht die Frage bezüglich der Form des Integraläquivalents einer solchen Gleichung, wenn es ein solches Integraläquivalent überhaupt giebt.

§ 45.

Euler, welcher jede Differentialgleichung als nothwendig aus einer Integralgleichung hergeleitet ansah, erklärte*), dass, wenn die Bedingungen nicht erfüllt sind, die Gleichung einfach absurd ist und keine Bedeutung hat. Monge hingegen**) meinte, dass die Absurdität nicht in der Annahme, dass die Gleichung eine Bedeutung haben könne, liege, sondern vielmehr in der Voraussetzung, dass das Integraläquivalent aus einer einzigen Gleichung bestehe, und er erläuterte seine Ansicht durch die Bemerkung, dass die totale Differentialgleichung zwischen drei Variablen, wenn die Bedingung erfüllt sei,

---

*) Instit. Calc. Int. Vol. III, Theil 1, § 1, c. 1 (2. Ausg.), S. 5.

**) Mém. de l'Acad. Royale des Sciences (1784), S. 535.

einer Fläche angehöre, dass dieselbe aber, wenn die Bedingung nicht erfüllt sei, eine gewisse Eigenschaft einer Curve doppelter Krümmung darstelle*), obwohl die Curve selbst zu ihrer vollständigen Darstellung zwei Integralgleichungen erfordert, und die Differentialgleichung werde durch die beiden Integralgleichungen zusammen befriedigt. Und Monge folgerte, dass ein Integraläquivalent einer totalen Differentialgleichung zwischen beliebig vielen Variablen bestehen könne aus einem System von Gleichungen, deren Anzahl niemals grösser und zuweilen kleiner sein könne, als die um Eins verminderte Anzahl der Variablen.

§ 46.

In diesem Zustande verblieb die Theorie dieser Gleichungen bis zum Jahre 1815, wo Pfaff der Berliner Akademie seine klassische Abhandlung**) einreichte, in welcher er zu dem Resultate kam, dass ein Integraläquivalent einer totalen Differentialgleichung zwischen $2n$ oder $2n-1$ Variablen stets gebildet werden könne durch ein System von Integralgleichungen, deren Anzahl nicht grösser als n ist. Mit Rücksicht auf die Bedeutung der in dieser Abhandlung zuerst ausgesprochenen Resultate ist das Problem der Bestimmung des Integraläquivalents einer totalen Differentialgleichung, bei welcher die in Rede stehenden Bedingungen nicht erfüllt sind, das **Pfaff'sche Problem** genannt worden.

Für die Gleichung mit einer ungeraden Anzahl von Veränderlichen hatte Pfaff das angegebene Resultat, betreffend die Anzahl von Gleichungen des Integralsystems, nur als Behauptung aufgestellt und zwar offenbar als eine Verallgemeinerung aus einigen individuellen Beispielen. Gauss***) wiederholte nur Pfaff's Behauptung. Die

---

*) Die durch die Gleichung dargestellte Eigenschaft ist, wenn die Bedingung nicht erfüllt ist, einer Schaar von doppeltgekrümmten Linien, welche durch zwei Integralgleichungen definirt werden, gemeinsam; wenn aber die Bedingung erfüllt ist, so wird die Schaar von krummen Linien von allen Curven gebildet, welche auf einer gewissen Fläche gezogen werden können, und die Differentialgleichung, welche jene Eigenschaft darstellt, kann als zur Fläche gehörig betrachtet werden.

**) „Methodus generalis aequationes differentiarum partialium nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotcunque variabiles complete integrandi." Abh. d. k. pr. Akad. der Wiss. zu Berlin (1814—1815), S. 76—136.

***) Gött. gel. Anz. (1815), S. 1025—1038. Ges. Werke Bd. 3, S. 231—241.

Lücke wurde erst ausgefüllt durch Jacobi*), welcher einen Beweis für die Behauptung gab. Von Gauss und Jacobi**) rühren einige Verbesserungen und Erweiterungen her und der ganze Gang der Methode wurde durch Untersuchungen von Cayley über schiefe Determinanten***) bedeutend einfacher gestaltet. In diesen Untersuchungen kommen Functionen vor, welche bereits in den Untersuchungen von Pfaff auftraten, und daher werden diese Functionen Pfaff'sche Functionen genannt.

Die von Pfaff für die Herstellung des Integralsystems angegebene Methode hängt von der schrittweisen Verringerung der Anzahl von Differentialelementen in der gegebenen Differentialgleichung ab und jede Reduction dieser Zahl um eine Einheit wird ausgeführt mit Hülfe der Lösung von Systemen gewöhnlicher simultaner Differentialgleichungen.

Es müssen auf diese Weise, wenn Pfaff's ursprüngliche Methode angewendet wird, eine Anzahl von Systemen von Hülfsgleichungen integrirt werden. Unter den bereits erwähnten von Jacobi herrührenden Verbesserungen betrifft die wichtigste und wesentlichste Verbesserung gerade diese Integrationen. Er zeigte†), dass die Einführung der „Anfangswerthe" der Variablen — welche später von Lie (Kap. 10) mit so grossem Erfolge bei der Theorie des Pfaff'schen Problems benutzt wurde — es ermöglicht, die Integrale des ersten Hülfssystems in einer Form zu nehmen, welche unmittelbar zur Transformation der Gleichung führt. Diese Vereinfachung wurde von ihm jedoch nur für die Gleichung mit einer geraden Anzahl von Veränderlichen, wenn die Bedingungsgleichungen nicht erfüllt sind, ausgeführt. Und in dem besonderen Falle, wo der Pfaff'sche Ausdruck im Zusammenhange mit der Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung auftritt, zeigte er, dass die Integration des ersten Hülfssystems ausreicht für die Reduction des Pfaff'schen Ausdrucks auf seine Normalform und daher ausreicht für die Integration der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung.

---

*) Crelle's Journ. Bd. 2 (1827), S. 347 - 357. Ges. Werke Bd. 4, S. 17—29.

**) Vergl. hierüber (und auch in Bezug auf Kap. 4) eine Abhandlung von Mayer, Math. Annal. Bd. 17 (1880), S. 523—530.

***) Vergl. über diese Scott's Theory of Determinants.

†) Crelle's J. Bd. 17 (1837), S 97—162. Ges. Werke Bd. 4, S. 57—127.

§ 47.

Wesentliche Ergänzungen der Entwickelung der Theorie wurden erst*) in den Jahren 1861 und 1862 durch die Abhandlungen von Natani**) und Clebsch***), sowie durch die (eigentlich zweite) Ausgabe von Grassmann's Ausdehnungslehre†) gebracht. Aus einer Behauptung Jacobi's††) kann man schliessen, dass er schon im Jahre

*) Wir müssen jedoch eine Abhandlung von Frisiani „Sull' integrazione delle equazioni differenziali ordinarie di primo ordine e lineari fra un numero qualunque di variabili" erwähnen, die im Jahre 1847 als Anhang zu den Effemeridi Astronomiche di Milano für das Jahr 1848 erschien. In dieser Abhandlung giebt der Verfasser ein Resumé der Theorie, wie sie zu jener Zeit bekannt war, leider ohne einen einzigen Bezug auf andere Autoren. Er deutet die Gauss'sche Transformation (vgl. später § 68) eines Pfaff'schen Ausdrucks auf die reducirte Form an; er löst die Hülfsgleichungen, nachdem er sie in einer (später in § 55 gegebenen) Form erhalten hat, in welcher sie für die Integration am einfachsten sind; er discutirt die Möglichkeit, dass die Pfaff'sche Gleichung durch weniger Gleichungen, als die kanonische Zahl beträgt, befriedigt wird, wenn unter den Coefficienten der Differentialelemente Relationen bestehen, und wendet schliesslich die Theorie auf die Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung an.

**) Crelle's J. Bd. 58, S. 301—328, datirt vom Januar 1860.

***) Crelle's J. Bd. 60, S. 193—251; Bd. 61, S. 146—179, datirt vom September 1860.

†) „Die Ausdehnungslehre, vollständig und in strenger Form bearbeitet" von Hermann Grassmann, Berlin 1862.

Was das Datum der Vollendung der den vorliegenden Gegenstand betreffenden Abschnitte anlangt, so kann man nur sagen, dass dieselbe vor dem August 1861, dem Datum der Vorrede, und nach dem Jahre 1844 geschehen ist, weil er in dieser Vorrede bemerkt, dass die Hinzufügungen (welche jene Abschnitte enthalten) die Arbeit der zwischenliegenden siebzehn Jahre seien. Seine Untersuchungen über die Pfaff'sche Gleichung sind wahrscheinlich mit zuletzt abgeschlossen worden, weil er für die Betrachtung jener Gleichung einige der späteren Entwickelungen seiner Theorie braucht, Entwickelungen, die aus ihrer Stellung (§ 504—510) zu schliessen in der That erst speciell für diesen Zweck angestellt zu sein scheinen.

In der historischen Uebersicht im Texte habe ich zuerst einen Auszug aus den Grassmann'schen Resultaten gegeben, nicht weil er offenbar seine Untersuchungen eher als Natani oder Clebsch abgeschlossen hatte, sondern weil dieselben bei der schrittweisen Entwickelung der Theorie in natürlicher Weise an diese Stelle gehören. Es dürfte überflüssig sein hervorzuheben, dass aus dem Inhalt und der Form der von Grassmann, Natani und Clebsch gefundenen Resultate, im Verein mit dem Datum ihrer Publication, genügend deutlich hervorgeht, dass ihre Untersuchungen vollkommen unabhängig von einander sind.

††) Crelle's J. Bd. 29, S. 253.

1845 im Besitze einiger solcher Ergänzungen war; da aber, wie später (§ 68) gezeigt wird, seine Behauptung nur aus Pfaff's allgemeinem Resultat deducirt ist, so lässt sich kein sicherer Schluss in dieser Beziehung ziehen. Sicher ist, dass er nach dieser vereinzelten Stelle in einer einen andern Gegenstand behandelnden Abhandlung nichts mehr publicirt hat, was sich direct auf die Theorie des Pfaff'schen Problems bezieht, und in seinem handschriftlichen Nachlasse fand sich nichts darauf Bezügliches vor.

§ 48.

Grassmann's Methode ist wegen des ungewohnten Charakters der angewendeten Behandlungsweise schwieriger zu verstehen*); im folgenden geben wir die Hauptzüge seiner Theorie.

Er stellt zunächst die Differentialgleichung zwischen m Veränderlichen in einer Form $Xdx = 0$ dar, wo die extensive Variable x m Einheiten umfasst. Er beweist, dass, wenn das äquivalente Integralsystem n Gleichungen von der Form $u = c$ enthält, alsdann

$$Xdx = \Sigma\, Udu$$

ist, und drückt die Bedingungen aus, welche nothwendig und hinreichend sind für die Existenz dieser n Integrale — Bedingungen, welche zu dem Schlusse führen, dass $2n - 1$ kleiner sein muss als m**).

In dem Falle, wo m gleich $2n$ ist, in welchem also keine Bedingungen für die Gleichung bestehen, ist der erste Schritt, wie gewöhnlich, die Herstellung einer Hülfsgleichung, deren Integral den Uebergang zu einer neuen Form $Ada = 0$ möglich macht; in dieser Form ist a eine neue extensive Variable, welche nur $2n - 1$ Einheiten enthält. Indem er alsdann ein Integral derselben annimmt, geht er, genau so wie es die früheren oben erwähnten Autoren gethan haben, zu einer keiner Bedingung unterworfenen Gleichung

*) Vgl. die Anmerkung am Anfang von Kap. 5.

**) Es wird implicite vorausgesetzt, dass, wenn die Coefficienten einer Gleichung keiner charakteristischen Bedingung genügen, alsdann die Anzahl der Variablen gerade ist, so dass Grassmann in Wirklichkeit nur die geraden Classen von keiner Bedingung unterliegenden Gleichungen betrachtet. Natürlich ist dies vom Standpunkt der allgemeinen Theorie der Pfaff'schen Gleichung ein Mangel; es wird aber erklärlich durch den Umstand, dass bei ihm wie bei Pfaff die Gleichung ihren Ursprung in der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung hat, in welchem Falle die Anzahl der Variablen gerade ist (vergl. Kap. 7).

zwischen $2n-2$ Variablen über. Das vorige Verfahren wird nun wiederholt und auf diese Weise werden die n Integrale schrittweise erhalten.

In dem Falle, wo m grösser ist als $2n$, zeigt er, dass das System der m Hülfsgleichungen — das „numerische" Aequivalent seiner einzigen extensiven Gleichung — nur $2n$ unabhängige Gleichungen enthält. Durch die zulässige Annahme, dass $m-2n$ der numerischen Variablen constant sind, erhält er eine Transformationsbeziehung, welche, auf $Xdx=0$ angewandt, dieselbe in eine Gleichung $Ada=0$ verwandelt, in welcher die extensive Variable nur $m-1$ Einheiten enthält und für welche, wenn $m-1>2n$ ist, die Bedingungen dafür, dass das Integralsystem aus n Gleichungen besteht, erfüllt sind. Dieser Process wird von Neuem angewendet und fortgesetzt, bis er schliesslich zu einer keiner Bedingung unterliegenden Gleichung gelangt, deren extensive Variable nur $2n$ Einheiten enthält. Auf diese Gleichung wird die frühere Methode angewendet und so nach und nach das System von n Integralen erhalten.

Die Beschränkung der Methode auf Gleichungen zwischen einer geraden Anzahl von Variablen, wenn dieselben keiner Bedingung unterliegen, ist bereits in der zweiten Anmerkung auf voriger Seite hervorgehoben, und auf einen schwachen Punkt in der Anwendung — die Integration des Hülfssystems — wird später hingewiesen werden (§ 80 Anm.). Einen entschiedenen Fortschritt bedeutet die Methode insofern, als sie ein Verfahren für eine Gleichung, deren Coefficienten Bedingungen genügen, angiebt, durch welches die Anzahl der Integrale unter diejenige herabgedrückt wird, welche von der allgemeinsten Gleichung zwischen der gleichen Anzahl von Veränderlichen erfordert wird, und ein weiterer Fortschritt ist der Ausdruck der Bedingungen, welche für diesen Zweck nothwendig und hinreichend sind. Grassmann beweist indessen nicht, dass seine Bedingungen von einander unabhängig sind, und bemerkt nicht, dass das Erfülltsein einiger zufälligen Bedingungen, z. B. wenn das lückenhaltige Product $\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^n\right]$ verschwindet, die reducirte Form modificiren würde. Diese letztere Möglichkeit wurde nur von späteren Autoren, z. B. Clebsch und Lie, ins Auge gefasst, welche keinen Bedingungen unterliegende Gleichungen zwischen einer ungeraden Anzahl von Variablen in Betracht zogen.

Ferner geziemt es sich, auch auf die bemerkenswerthe formale Bündigkeit seiner Resultate aufmerksam zu machen.

§ 49.

Natani und Clebsch wenden zur Lösung des Problems Methoden an, welche, obwohl im Einzelnen verschieden, doch eine gemeinschaftliche charakteristische Grundidee haben; auf dieser Grundlage wurde eine Vergleichung beider Methoden von Hamburger*) gegeben. Die Grundidee jeder Methode ist die schrittweise Reduction der Anzahl der Differentialelemente in der Gleichung, nicht wie bei der Pfaffschen Methode durch aufeinanderfolgende Transformationen, sondern mit Hülfe der aufeinanderfolgenden Glieder des der Differentialgleichung äquivalenten Integralsystems, und die Anzahl von Hülfsgleichungen, welche zu lösen sind, ist beträchtlich geringer als bei dem Verfahren von Pfaff. So wird z. B. eine Differentialgleichung zwischen $2n$ Variablen, deren äquivalentes Integralsystem aus n Gleichungen besteht, mit Hülfe eines dieser Integrale auf eine Differentialgleichung mit $2n - 1$ Variablen zurückgeführt, deren äquivalentes Integralsystem nur aus $n - 1$ Gleichungen besteht. Die neue Differentialgleichung wird in ähnlicher Weise mittels eines der Integrale aus ihrem äquivalenten Integralsystem auf eine Differentialgleichung mit $2n - 2$ Variablen reducirt, deren Integralsystem nur $n - 2$ Gleichungen besitzt. Und so geht es weiter fort, bis man eine Differentialgleichung zwischen $n + 1$ Variablen erhält, deren äquivalentes Integralsystem aus nur einem einzigen Integral besteht; dieselbe ist daher von der bereits betrachteten Art (Kap. 1).

Von den Methoden, welche von diesen beiden Autoren herrühren, ist die von Natani vorgeschlagene die einfachere und sie ist hinsichtlich der Ableitung eines particulären Integralsystems die directere. Sie hat überdies den Vortheil, dass sie durch die zufälligen Schwierigkeiten, welche entstehen, wenn noch weitere Bedingungen erfüllt sind, nicht beeinträchtigt wird. Indessen leidet sie an dem Mangel, dass sie nicht vollständig allgemein ist. Dieser Mangel ist zum Theil durch die Methoden von Clebsch ergänzt worden, welcher zeigt, wie man aus irgend einem speciellen Integralsystem — z. B. dem Natanischen — das allgemeinste Integralsystem erhalten kann. Clebsch hat zwei Methoden gegeben. Seine erste Methode ist der Natani'schen in Bezug auf das Ziel analog, sie ist aber nicht so wirkungsvoll bei Gleichungen mit einer ungeraden Anzahl von Variablen (in der That giebt er nirgends eine entsprechende Discussion dieser Art von Glei-

*) Grunert's Archiv, Bd. 60 (1877), S. 185—214.

chungen) und die Methode bleibt eine auf schrittweiser Reduction beruhende. Seine zweite Methode, welche in ihren Resultaten verhältnissmässig einfach und sehr erfolgreich ist, beschränkt sich in seinen Untersuchungen leider auf keiner Bedingung unterworfene Gleichungen zwischen einer geraden Anzahl von Veränderlichen. In beiden Methoden von Clebsch werden die Resultate nach langen und mühsamen Rechnungen auf Systeme von simultanen partiellen Differentialgleichungen gegründet.

Somit ist die hervorstechende Eigenthümlichkeit der Methode von Natani die schnelle und erfolgreiche Bestimmung irgend eines der Differentialgleichung entsprechenden Systems von Integralgleichungen, während die hervorstechende Eigenthümlichkeit der Clebsch'schen Methode die nachherige Verallgemeinerung eines solchen Systems und, für eine keiner Bedingung unterliegende Gleichung zwischen einer geraden Anzahl von Veränderlichen, die vorherige Bestimmung eines solchen allgemeinen Systems ist.

Clebsch sowohl wie Natani haben bei ihren bezüglichen Methoden die Wirkung betrachtet, welche die Kenntniss eines oder mehrerer Integrale der Differentialgleichung auf die Form der übrigen Integrale hat; in dieser Hinsicht sind die Resultate von Clebsch die einfacheren, da seine Methode zu ihrer Bestimmung geeigneter ist.

Was in diesem Theile der Theorie noch hauptsächlich zu wünschen bleibt, das sind Erweiterungen von Clebsch's zweiter (und allgemeiner) Methode erstens auf Gleichungen zwischen einer geraden Anzahl von Variablen für den Fall, dass Bedingungen bestehen, und zweitens auf Gleichungen zwischen einer ungeraden Anzahl von Veränderlichen, mögen nun Bedingungen bestehen oder nicht.

§ 50.

Dies wurde indirect und theilweise von Lie ausgeführt, der von einem ganz verschiedenen Standpunkte ausging*). Derselbe machte die Theorie der Berührungstransformationen**) zur Basis seiner Untersuchungen, speciell in Bezug auf die Transformation des Differentialausdrucks. Er begründete das Fortbestehen des Charakters der

*) Seine Abhandlungen wurden zu verschiedenen Zeiten in den Jahren 1873 und 1874 veröffentlicht; die beste Uebersicht über die Resultate ist seine Abhandlung „Theorie des Pfaff'schen Problems", Arch. for Math. og Nat. Bd. II (1877), S. 338—379.

**) Mayer gab eine unabhängige Begründung dieser Theorie; vgl. Kap. 9.

Normalform, eine Invarianten-Eigenschaft, welche von Clebsch ohne Begründung angenommen worden war; und die Gleichungen, welche die Beziehung zweier äquivalenten Normalformen zu einander geben, werden aufgestellt und stimmen mit den von Clebsch gegebenen überein. Die Kriterien, welche die Anzahl der Functionen in der Normalform und daher den Charakter der letzteren bestimmen, werden gefunden, und wenn diese einmal für irgend einen Ausdruck bekannt sind, so wird der Ausdruck durch die Lie'sche Methode auf einen äquivalenten, keiner Bedingung unterworfenen Ausdruck mit einer ähnlichen Normalform zurückgeführt. Diese Zurückführung geschieht durch eine Anzahl von Substitutionen von der Art, wie sie ursprünglich von Cauchy (1819) und später von Hamilton, Jacobi und Mayer angewendet wurden. Das erste Element der Normalform des neuen keiner Bedingung unterworfenen Ausdrucks wird durch eine partielle Differentialgleichung bestimmt und dieses Element wird dann benutzt, um den Ausdruck in einen von weniger Variablen zu verwandeln. Die Normalform wird schrittweise erhalten, indem man mehrere Male hinter einander abwechselnd ein neues Element bestimmt und den Ausdruck, welcher durch den Gebrauch dieses Elementes zu einem bedingten geworden ist, auf einen keiner Bedingung unterworfenen Ausdruck reducirt. Hat man die Normalform des keiner Bedingung unterworfenen dem ursprünglichen Ausdruck äquivalenten Ausdrucks gefunden, so ist der Uebergang zur Normalform der letzteren nur eine Sache einer bestimmten Rückwärts-Substitution. Das Integralsystem der gegebenen Gleichung wird dann aus einem, wenn wir nicht irren, zuerst von Grassmann angegebenen Satze in seiner gewöhnlichen Form erhalten.

Lie's Resultate bilden eine hervorragende Erweiterung der Theorie. Seine Untersuchungen sind nicht insgesammt neu, wie wohl kaum erwartet werden kann; aber bei seiner Darlegung liegt ein grosses Interesse in der Anwendung und Combination von Ideen, welche in anderen Zusammenhängen auftreten.

§ 51.

Zur Zeit der Veröffentlichung der eben erwähnten Abhandlung von Lie hatte Frobenius seine das Pfaff'sche System behandelnde Abhandlung*) bereits vollendet (Sept. 1876). Er discutirt mehr die

---

*) „Ueber das Pfaff'sche Problem"; Crelle's J. Bd. 82 (1877), S. 230—315.

Theorie der Normalform als die Integration der Gleichung, und seine Untersuchungsmethode ist mehr algebraisch als differential. Er findet die zum Pfaff'schen Ausdruck gehörige bilineare Covariante und verwandelt dann die Pfaff'sche Function und die Differential-Covariante in homogene algebraische Formen, welche linearen Transformationen unterworfen werden. Es wird gezeigt, dass für die Transformation einer Pfaff'schen Function in eine andere das Fortbestehen einer gewissen mit einem Paar charakteristischer Determinanten zusammenhängenden invarianten ganzen Zahl nothwendig und hinreichend ist; die Substitutionsgleichungen stehen mit der Normalform im Zusammenhange. Auf diese Weise gelangt er indirect zur Normalform; ihr Charakter wird allein bestimmt durch den Werth der invarianten ganzen Zahl. Eine kurze Begründung der Hauptresultate ist in § 168 gegeben.

Das neue Interesse der Methode liegt hauptsächlich in dem Zusammenhange der Anzahl der Glieder in der Normalform mit den kritischen algebraischen Bedingungen, welche zu den Clebsch'schen Differentialgleichungen führen.

§ 52.

Die Arbeiten, mit denen sich Darboux zu dieser Zeit (1877) beschäftigte, sind sowohl mit denen von Lie als mit denen von Frobenius verwandt. Seine Methode simultaner Systeme von Variationen der unabhängigen Veränderlichen ist im Wesentlichen dieselbe wie die von Frobenius, welcher zwei Reihen cogredienter Variablen betrachtet; und diese simultanen Variationen werden angewendet, um einen Theil der Lie'schen Theorie der Berührungstransformationen zu begründen. Alle seine Resultate aber beziehen sich auf die Theorie äquivalenter Formen der Gleichung und nicht auf ihr Integralsystem; seine Abhandlung*) wurde erst im Jahre 1882 publicirt und zu dieser Zeit waren alle seine Resultate bereits anticipirt. Deshalb wird hier nur eine kurze Begründung derjenigen seiner Sätze gegeben, welche sich auf die Differentialgleichung beziehen.

*) „Sur le problème de Pfaff", Darb. Bull. 2. Série Bd. 6 (1882), S. 14—36, 49—68.

4. Kapitel.

Pfaff's Reductionsmethode, vervollständigt durch Gauss und Jacobi.

§ 53.

Die allgemeinste Form der totalen Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades in p Variablen ist:

$$(1) \qquad \Omega = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p = 0,$$

wo $X_1, X_2, \ldots, X_p$ Functionen der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sind. Da die Classe von Gleichungen $\Omega = 0$, welche durch ein einziges Integral befriedigt werden können, bereits ausführlich erörtert worden ist, so wird im Folgenden angenommen, dass die Beziehungsgleichungen zwischen den Grössen X, welche die Möglichkeit der Herleitung der Differentialgleichung aus einer einzigen Integralgleichung ausdrücken, nicht sämmtlich erfüllt sind. Wenn es überhaupt ein Integraläquivalent, d. h. ein System von Relationen giebt, welche frei sind von Differentialelementen und mit Hülfe deren die Gleichung $\Omega = 0$ erfüllt werden kann, so wird der erste Schritt bei der Ermittelung dieses Aequivalents naturgemäss die Reduction der Differentialgleichung auf die explicit einfachste Form sein, welche sie annehmen kann. Wir wollen jetzt beweisen, dass sie in allen Fällen derart transformirt werden kann, dass sie nicht mehr als $\frac{1}{2}p$ oder $\frac{1}{2}(p+1)$ Differentialelemente enthält, je nachdem p gerade oder ungerade ist.

§ 54.

Führt man $p-1$ Functionen

$$u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$$

ein unter der gegenwärtig einzigen Voraussetzung, dass zwischen ihnen keine Functionalbeziehung besteht, so folgt aus dieser Unab-

hängigkeit der Functionen von einander, dass sämmtliche ursprüngliche Variablen bis auf eine, etwa x_p, ausgedrückt werden können durch diese eine und durch $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$, also dargestellt werden können durch Gleichungen von der Form

$$x_r = x_r(u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}, x_p) \tag{2}$$

für $r = 1, 2, \ldots, p-1$. Wird nun Ω mit Hülfe der Relationen (2) transformirt, so nimmt es die Form an:

$$\Omega = Y_1 du_1 + Y_2 du_2 + \cdots + Y_{p-1} du_{p-1} + Y_p dx_p,$$

wo

$$\left\{\begin{array}{l} Y_r = X_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial u_r} + X_2 \dfrac{\partial x_2}{\partial u_r} + \cdots + X_{p-1} \dfrac{\partial x_{p-1}}{\partial u_r} \\ \qquad\qquad \text{für } r = 1, 2, \ldots, p-1 \text{ und} \\ Y_p = X_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial x_p} + X_2 \dfrac{\partial x_2}{\partial x_p} + \cdots + X_{p-1} \dfrac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p} + X_p \end{array}\right. \tag{3}$$

ist.

Die Formen der Functionen u können wir willkürlich bestimmen; wir können ihnen auferlegen, dass sie $p-1$ unabhängige Bedingungen erfüllen sollen, wobei natürlich diese Bedingungen mit einander verträglich sein müssen; und mit Rücksicht auf die bezüglich der Formen der Functionen u gemachte Veraussetzung gilt das nämliche Princip auch für die $p-1$ Functionen in (2).

Als eine erste Bedingung legen wir den Functionen u auf, dass sie so gewählt seien, dass der Coefficient von dx_p in dem transformirten Ausdrucke von Ω verschwindet. Dies erfordert:

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_p} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_p} + \cdots + X_{p-1} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p} + X_p = 0. \tag{4}$$

Ferner seien die Formen der Functionen x_r in (2) derart gewählt, dass die Verhältnisse $Y_r : Y_1$ für die Werthe $2, 3, \ldots, p-1$ von r (was im Ganzen $p-2$ Bedingungen giebt, also soviel als noch übrig bleiben) unabhängig von x_p sind. Ist dies der Fall, so kann x_p in $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{p-1}$ nur dadurch vorkommen, dass ein sämmtlichen Grössen Y gemeinschaftlicher Factor M auftritt, so dass wir haben:

$$Y_r = M U_r, \tag{5}$$

wo U_r nur höchstens $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$, aber nicht x_p enthält, während x_p, wenn es überhaupt in Y_r vorkommt, nur in dem Factor M auftritt. Da U_r unabhängig von x_p ist, so haben wir:

$$\frac{\partial Y_r}{\partial x_p} = U_r \frac{\partial M}{\partial x_p},$$

und daher sind die Grössen Y_r, welche in (3) vorkommen, derart, dass

$$\frac{1}{Y_r}\frac{\partial Y_r}{\partial x_p} = \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial x_p} = \mu$$

oder:

$$\frac{\partial Y_r}{\partial x_p} = \mu Y_r \tag{6}$$

ist für die Werthe $1, 2, \ldots, p-1$ von r. Und alsdann muss das System von p Gleichungen (4) und (6) befriedigt werden durch die $p-1$ Functionen, welche in (2) vorkommen, und die Grösse μ. Wofern nicht etwa das System der Gleichungen (4) und (6) entweder in sich einen Widerspruch enthält oder identischen Relationen unterliegt, ist dasselbe genügend zur Bestimmung der Functionen und der Grösse μ, welche, wenn bestimmt, die Differentialgleichung in

$$\Omega = M(U_1 du_1 + U_2 du_2 + \cdots + U_{p-1} du_{p-1}) = 0$$

überführen, wo $U_1, U_2, \ldots, U_{p-1}$ Functionen von $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$ allein sind. Wir gehen daher über zur Betrachtung der Gleichungen (4) und (6).

§ 55.

In der Function Y_r, welche durch (3) gegeben ist als

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial u_r} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial u_r} + \cdots + X_{p-1} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial u_r},$$

müssen die ursprünglichen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$, wo immer sie in den Grössen X vorkommen, ersetzt werden durch ihre Werthe als Functionen von $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}, x_p$, so dass man jetzt von Y_r (welches in seiner ersten Form eine explicite Function von $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$, x_p und den $p-1$ Ableitungen nach u_r ist) annehmen kann, dass es diese $p-1$ Ableitungen und x_p explicit und die Grössen $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}, x_p$ implicit dadurch enthalte, dass dieselben für $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ eingeführt sind.

Nehmen wir nun irgend eine der Grössen Y, so können wir schreiben:

$$Y = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial u} + \cdots + X_{p-1} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial u},$$

wo, wenn wir Indices ansetzen wollen, Y und u den gleichen Index erhalten müssen. Nehmen wir beiderseits die Ableitung nach x_p und bedenken wir, dass infolge der obigen Darlegung x_p in X explicit (infolge ihres ursprünglichen Auftretens darin) und implicit (infolge

der Einführung durch die Substitutionen für $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$) vorkommt, so haben wir:

$$\frac{\partial Y}{\partial x_p} = X_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial x_p} + X_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial u \partial x_p} + \cdots + X_{p-1} \frac{\partial^2 x_{p-1}}{\partial u \partial x_p}$$
$$+ \sum_{s=1}^{p-1} \frac{\partial x_s}{\partial u} \left(\frac{\partial X_s}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x_p} + \frac{\partial X_s}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_p} + \cdots + \frac{\partial X_s}{\partial x_{p-1}} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p} + \frac{\partial X_s}{\partial x_p} \right).$$

Nach Gleichung (4) aber ist.

$$0 = X_p + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_p} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_p} + \cdots + X_{p-1} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p},$$

und somit, wenn wir wiederum beachten, dass u in X implicit vorkommt infolge ihrer Einführung durch die Substitutionen für $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$:

$$0 = \frac{\partial X_p}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial X_p}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u} + \cdots + \frac{\partial X_p}{\partial x_{p-1}} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial u}$$
$$+ \sum_{t=1}^{p-1} \frac{\partial x_t}{\partial x_p} \left(\frac{\partial X_t}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial X_t}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u} + \cdots + \frac{\partial X_t}{\partial x_{p-1}} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial u} \right)$$
$$+ X_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial x_p} + X_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial u \partial x_p} + \cdots + X_{p-1} \frac{\partial^2 x_{p-1}}{\partial u \partial x_p}.$$

Substituiren wir den aus diesen Gleichungen entnommenen Werth der letzten Zeile in den Ausdruck für $\frac{\partial Y}{\partial x_p}$, so erhalten wir:

$$\frac{\partial Y}{\partial x_p} = \sum_{s=1}^{p-1} \sum_{t=1}^{p-1} \frac{\partial x_s}{\partial u} \frac{\partial x_t}{\partial x_p} \frac{\partial X_s}{\partial x_t} + \sum_{s=1}^{p-1} \frac{\partial X_s}{\partial x_p} \frac{\partial x_s}{\partial u}$$
$$- \sum_{s=1}^{p-1} \frac{\partial X_p}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial u} - \sum_{t=1}^{p-1} \sum_{s=1}^{p-1} \frac{\partial x_t}{\partial x_p} \frac{\partial x_s}{\partial u} \frac{\partial X_t}{\partial x_s}.$$

Werden die erste und die letzte, ebenso die zweite und dritte Summation zusammengezogen, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial Y}{\partial x_p} = \sum_{s=1}^{p-1} \sum_{t=1}^{p-1} a_{s,t} \frac{\partial x_s}{\partial u} \frac{\partial x_t}{\partial x_p} + \sum_{s=1}^{p-1} a_{s,p} \frac{\partial x_s}{\partial u},$$

wo $a_{s,t}$ wie vorher durch die Gleichung bestimmt ist:

(7) $$a_{s,t} = \frac{\partial X_s}{\partial x_t} - \frac{\partial X_t}{\partial x_s},$$

oder schliesslich:

$$\frac{\partial Y}{\partial x_p} = \sum_{s=1}^{p-1} \frac{\partial x_s}{\partial u} \left\{ a_{s,p} + \sum_{t=1}^{p-1} \left(a_{s,t} \frac{\partial x_t}{\partial x_p} \right) \right\}.$$

Nach (6) aber ist:

$$\frac{\partial Y}{\partial x_p} = \mu Y$$
$$= \mu \sum_{s=1}^{p-1} X_s \frac{\partial x_s}{\partial u},$$

daher:

$$\mu \sum_{s=1}^{p-1} X_s \frac{\partial x_s}{\partial u} = \sum_{s=1}^{p-1} \frac{\partial x_s}{\partial u} \left\{ a_{s.p} + \sum_{t=1}^{p-1} \left(a_{s,t} \frac{\partial x_t}{\partial x_p} \right) \right\}.$$

Diese Gleichung gilt für $u = u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$; sie stellt daher ein System von Gleichungen dar, welche linear und homogen sind in Bezug auf gewisse Grössen von der Form:

$$\Theta_s = a_{s,p} - \mu X_s + \sum_{t=1}^{p-1} \left(a_{s,t} \frac{\partial x_t}{\partial x_p} \right).$$

Mit Benutzung dieser Bezeichnung werden die Gleichungen:

$$\Theta_1 \frac{\partial x_1}{\partial u_r} + \Theta_2 \frac{\partial x_2}{\partial u_r} + \cdots + \Theta_{p-1} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial u_r} = 0$$
$$(r = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Nun ist aber die Determinante der Coefficienten der Grössen Θ nicht Null; denn nach Voraussetzung sind die Functionen in (2) von einander unabhängig und daher verschwindet die Determinante

$$\frac{\partial (x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})}{\partial (u_1, u_2, \ldots, u_{p-1})}$$

nicht. Das System der Gleichungen kann daher nur befriedigt werden, wenn man jede der Grössen Θ gleich Null setzt, und somit erhalten wir:

$$(8)\left\{\begin{array}{l}
\mu X_1 = a_{1,p} + a_{1,2} \frac{\partial x_2}{\partial x_p} + a_{1,3} \frac{\partial x_3}{\partial x_p} + \cdots + a_{1,p-1} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p} \\
\mu X_2 = a_{2,p} + a_{2,1} \frac{\partial x_1}{\partial x_p} + a_{2,3} \frac{\partial x_3}{\partial x_p} + \cdots + a_{2,p-1} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p} \\
\mu X_3 = a_{3,p} + a_{3,1} \frac{\partial x_1}{\partial x_p} + a_{3,2} \frac{\partial x_2}{\partial x_p} + \cdots + a_{3,p-1} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mu X_{p-1} = a_{p-1,p} + a_{p-1,1} \frac{\partial x_1}{\partial x_p} + a_{p-1,2} \frac{\partial x_2}{\partial x_p} + a_{p-1,3} \frac{\partial x_3}{\partial x_p} + \cdots + a_{p-1,p-1} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p}, \\
\text{und} \\
\mu X_p = a_{p,1} \frac{\partial x_1}{\partial x_p} + a_{p,2} \frac{\partial x_2}{\partial x_p} + a_{p,3} \frac{\partial x_3}{\partial x_p} + \cdots + a_{p,p-1} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p}
\end{array}\right.$$

Diese letzte Gleichung wird erhalten aus (4) und den ersten $p-1$ Gleichungen in (8), weil

$$\mu X_p = -\mu X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_p} - \mu X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_p} - \cdots - \mu X_{p-1} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p}$$
$$= -a_{1,p} \frac{\partial x_1}{\partial x_p} - a_{2,p} \frac{\partial x_2}{\partial x_p} - \cdots - a_{p-1,p} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p},$$

da alle Glieder zweiten Grades in der ersten Ableitung von

$$x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$$

nach x_p verschwinden; und da $a_{s,t} = -a_{t,s}$ ist, so ist diese Gleichung dieselbe wie die letzte von (8). Das ganze System von Gleichungen kann in der Form etwas regelmässiger gestaltet werden. Denn substituirt man:

$$\text{(9)} \qquad \frac{1}{\mu} = y_p, \qquad \frac{1}{\mu}\frac{\partial x_r}{\partial x_p} = y_r,$$

so geht dasselbe über in:

$$\text{(10)} \quad \begin{cases} \qquad\qquad a_{1,2}y_2 + a_{1,3}y_3 + \cdots + a_{1,p-1}y_{p-1} + a_{1,p}y_p = X_1 \\ a_{2,1}y_1 \qquad\qquad + a_{2,3}y_3 + \cdots + a_{2,p-1}y_{p-1} + a_{2,p}y_p = X_2 \\ a_{3,1}y_1 + a_{3,2}y_2 \qquad\qquad + \cdots + a_{3,p-1}y_{p-1} + a_{3,p}y_p = X_3 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{p,1}y_1 + a_{p,2}y_2 + a_{p,3}y_3 + \cdots + a_{p,p-1}y_{p-1} \qquad\qquad = X_p. \end{cases}$$

§ 56.

Dieses Gleichungssystem ist ein System von p algebraischen Gleichungen zwischen p linear vorkommenden Grössen, und wofern die Gleichungen nicht mit einander in Widerspruch stehen oder identischen Relationen unterworfen sind, werden sie diese Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_p$ bestimmen. Wird die Determinante der Coefficienten auf der linken Seite mit Δ bezeichnet, so dass

$$\text{(11)} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 0, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, & a_{1,p} \\ a_{2,1}, & 0, & a_{2,3}, & \ldots, & a_{2,p} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & 0, & \ldots, & a_{3,p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p,1}, & a_{p,2}, & a_{p,3}, & \ldots, & 0 \end{vmatrix}$$

ist, so ist die Lösung der Gleichungen (10) von der Form

$$\text{(12)} \qquad \Delta y_r = V_r,$$

wo V_r der Werth der Determinante ist, welche man erhält, wenn in letzterer die Colonne $a_{1,r}, a_{2,r}, a_{3,r}, \ldots$ durch $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ersetzt wird, und r nimmt die Werthe $1, 2, 3, \ldots, p$ an.

§ 57.

Was die wirkliche Beschaffenheit des Resultats anbelangt, so sind drei Fälle zu unterscheiden.

Erstens, wenn die Determinante Δ nicht verschwindet, so sind die Werthe der Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_p$ in den Gleichungen (12) eindeutig und bestimmt. Das System (10) ist dann ein in sich verträgliches System und seine einzelnen Glieder sind von einander unabhängig.

Zweitens, wenn die Determinante Δ und zugleich sämmtliche Grössen V_r verschwinden, so sind die Werthe der Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_p$ in den Gleichungen (12) (in ihrer gegenwärtigen Form) unbestimmt. Die einzelnen Glieder des Systems (10) können dann nicht unabhängig von einander sein.

Drittens, wenn die Determinante Δ verschwindet, aber einige der Grössen V_r nicht verschwinden, so sind die Werthe der entsprechenden Grössen y_r unendlich gross und die der übrigen sind unbestimmt; ist y_1 unendlich gross, so dass $\mu = 0$ ist, so kann es vorkommen, dass die Werthe von $\frac{y_r}{y_1}$ endlich und bestimmt sind. Das System (10) kann ein in sich verträgliches System sein oder nicht.

Die Hauptunterscheidung zwischen den einzelnen Fällen wird daher durch den Werth von Δ gegeben.

§ 58.

Nun sind die Elemente der durch (11) definirten Determinante Δ derart, dass $a_{t,s} = -a_{s,t}$ und $a_{t,t} = 0$ ist; sie ist demnach eine schiefe symmetrische Determinante*).

Ist p eine gerade ganze Zahl, so ist die Determinante Δ ein vollkommenes Quadrat, welches infolge der besonderen Formen von $X_1, X_2, \ldots, X_p$ verschwinden kann, aber nicht nothwendig verschwinden muss.

Ist p eine ungerade ganze Zahl, so verschwindet die Determinante Δ, welches auch die Grössen $X_1, X_2, \ldots, X_p$ sein mögen.

---

*) In Bezug auf die Eigenschaften solcher Determinanten und ihrer Minoren vgl. z. B. Scott's Determinants, Kap. 6, § 4—16.

§ 59.

Wir nehmen zunächst den ersten der beiden Fälle, wo p eine **gerade** ganze Zahl ist, und setzen an erster Stelle voraus, dass Δ nicht verschwindet.

Es sei

$$\Delta = P_p^2 = P^2; \tag{13}$$

dann ist P eine Pfaff'sche Function von der Ordnung p und bestimmt durch die Gesetze:

$$P_p = [1, 2, 3, \ldots, p]$$
$$= \sum_{s=2}^{p} a_{1,s} [s+1, s+2, \ldots, p, 2, \ldots, s-1]$$
$$P_2 = a_{1,2}.$$

Ist dann A_s die zu $a_{s,t}$ gehörige Unterdeterminante in Δ, so ist:

$$A_{s,t} = (-1)^{s+t} PP_{s,t}$$
$$= -A_{t,s} = (-1)^{s+t+1} PP_{t,s},$$

wo $P_{i,k}$ für $i < k$ die Pfaff'sche Function ist, welche aus P erhalten wird, wenn man in dem Symbol $[1, 2, 3, \ldots, p]$ die ganzen Zahlen i und k weglässt.

Also wenn $s < r-1$ ist, so ist:

$$P_{s,r} = [1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, p]$$
$$= (-1)^{s-1}[s+1, s+2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, p, 1, 2, \ldots, s-1];$$

wenn $s = r-1$, so ist:

$$P_{r-1,r} = [1, 2, \ldots, r-2, r+1, \ldots, p]$$
$$= (-1)^{r-2}[r+1, r+2, \ldots, p, 1, \ldots, r-2]$$

und wenn $s = r+1$, so ist:

$$P_{r+1,r} = -P_{r,r+1}$$
$$= -(-1)^{r-1}[r+2, r+3, \ldots, p, 1, \ldots, r-1]$$

(nach dem vorhergehenden Falle) oder:

$$= (-1)^{r}[r+2, r+3, \ldots, p, 1, \ldots, r-1]$$

und schliesslich, wenn $s > r+1$:

$$P_{s,r} = -P_{r,s}$$
$$= -[1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, s-1, s+1, \ldots, p]$$
$$= -(-1)^{s-2}[s+1, s+2, \ldots, p, 1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, s-1],$$

so dass in allen Fällen, wo p gerade:

$$P_{s,r} = (-1)^{s-1}[a, b, \ldots, k]$$

ist, wo $a, b, \ldots, k$ die ganzen Zahlen $1, 2, \ldots, p$ (mit Weglassung von s und r) sind, genommen in ihrer cyklischen Reihenfolge, wobei man mit derjenigen ganzen Zahl, welche hinter s noch übrig bleibt, zu beginnen hat.

Hiernach werden die Gleichungen (12)

$$\begin{aligned} P^2 y_r &= V_r \\ &= \sum_{s=1}^{p} X_s A_{s,r} \\ &= \sum_{s=1}^{p} (-1)^{s+r} P X_s P_{s,r} \end{aligned}$$

und daher:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} (-1)^{r-1} P y_r &= \sum_{s=1}^{p} (-1)^{s-1} X_s P_{s,r} \\ &= \sum_{s=1}^{p} X_s [s+1, s+2, \ldots, s-1] \\ &= W_r, \end{aligned} \right.$$

wo für jedes Glied unter dem Summenzeichen rechts die ganzen Zahlen $s, s+1, s+2, \ldots, s-1$ die ganzen Zahlen $1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, p$ in ihrer cyklischen Reihenfolge darstellen und insbesondere der Coefficient von X_{r-1} gleich $[r+1, \ldots, p, 1, \ldots, r-2]$ und der Coefficient von X_r gleich Null ist.

Z. B. sind für $p = 4$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned} [1, 2, 3, 4] y_1 &= + X_2[3, 4] + X_3[4, 2] + X_4[2, 3] \\ -[1, 2, 3, 4] y_2 &= X_1[3, 4] + X_3[4, 1] + X_4[1, 3] \\ +[1, 2, 3, 4] y_3 &= X_1[2, 4] + X_2[4, 1] + X_4[1, 2] \\ -[1, 2, 3, 4] y_4 &= X_1[2, 3] + X_2[3, 1] + X_3[1, 2], \end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned} [l, m] &= a_{l,m} \\ [1, 2, 3, 4] &= a_{1,2} a_{3,4} + a_{1,3} a_{4,2} + a_{1,4} a_{2,3}; \end{aligned}$$

und für $p = 6$ sind die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
[1,2,3,4,5,6]y_1 &= + [3,4,5,6]X_2 + [4,5,6,2]X_3 + [5,6,2,3]X_4 + [6,2,3,4]X_5 + [2,3,4,5]X_6 \\
-[1,2,3,4,5,6]y_2 &= [3,4,5,6]X_1 + [4,5,6,1]X_3 + [5,6,1,3]X_4 + [6,1,3,4]X_5 + [1,3,4,5]X_6 \\
[1,2,3,4,5,6]y_3 &= [2,4,5,6]X_1 + [4,5,6,1]X_2 + [5,6,1,2]X_4 + [6,1,2,4]X_5 + [1,2,4,5]X_6 \\
-[1,2,3,4,5,6]y_4 &= [2,3,5,6]X_1 + [3,5,6,1]X_2 + [5,6,1,2]X_3 + [6,1,2,3]X_5 + [1,2,3,5]X_6 \\
[1,2,3,4,5,6]y_5 &= [2,3,4,6]X_1 + [3,4,6,1]X_2 + [4,6,1,2]X_3 + [6,1,2,3]X_4 + [1,2,3,4]X_6 \\
-[1,2,3,4,5,6]y_6 &= [2,3,4,5]X_1 + [3,4,5,1]X_2 + [4,5,1,2]X_3 + [5,1,2,3]X_4 + [1,2,3,4]X_5.
\end{aligned}
$$

Es möge bemerkt werden, dass nicht sämmtliche Grössen W_r in den Gleichungen (14) verschwinden können; denn sonst müsste die Determinante der Coefficienten der nicht verschwindenden Grössen X in W verschwinden, dieselbe ist aber, wie man leicht beweist, gleich P^{p-2} und daher nach der gegenwärtigen Voraussetzung nicht gleich Null.

Und analog können auch nicht sämmtliche Grössen W_r bis auf eine einzige verschwinden. Denn bildet man die Function

$$X_1 W_1 - X_2 W_2 + X_3 W_3 - \cdots - X_p W_p,$$

so verschwindet dieselbe identisch, und daher würde, wenn sämmtliche Grössen W_r bis auf eine, z. B. W_1, verschwänden, auch $X_1 W_1$ und somit, da X_1 nicht Null ist, auch W_1 verschwinden, so dass also dann sämmtliche Functionen W verschwinden würden, was nach der Voraussetzung über das Nichtverschwinden von Δ eben als unmöglich bewiesen wurde.

§ 60.

Es folgt alsdann, dass, wenn p eine gerade ganze Zahl ist und Δ nicht verschwindet, die Gleichungen (14) eine bestimmte Lösung der Gleichungen (10) bilden. Die Grössen y sind:

$$y_p = \frac{1}{\mu}, \quad y_r = \frac{1}{\mu} \frac{\partial x_r}{\partial x_p},$$

daher nach (14):

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial x_r}{\partial x_p} = (-1)^{\;-1} \frac{W_r}{P}$$

$$\frac{1}{\mu} \qquad = (-1)^{p-1} \frac{W_p}{P} = -\frac{W_p}{P}$$

und somit:

$$\frac{\partial x_r}{\partial x_p} = (-1)^r \frac{W_r}{W_p}.$$

Hiernach haben wir zur Bestimmung der Functionen x_r in § 54 die $p-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$(15) \qquad \frac{dx_1}{W_1} = \frac{dx_2}{-W_2} = \frac{dx_3}{W_3} = \cdots = \frac{dx_{p-1}}{W_{p-1}} = \frac{dx_p}{-W_p},$$

Gleichungen, welche das Pfaff'sche Hülfssystem genannt werden.

Mindestens zwei der Grössen W sind von Null verschieden und als eine dieser von Null verschiedenen Grössen kann W_p*) genommen werden, so dass die Gleichungen des Hülfssystems die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ als Functionen von x_p bestimmen, welche Functionen willkürliche Constanten enthalten. Wir können daher die Integrale von (15) in der Form annehmen:

$$J_1 = a_1, \quad J_2 = a_2, \ldots, \quad J_{p-1} = a_{p-1},$$

wo $J_1, J_2, \ldots, J_{p-1}$ von einander unabhängige Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_p$ und $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ willkürliche von einander unabhängige Grössen sind, die, soweit Variationen von x_p in Betracht kommen, constant sind.

Nun setzen die Substitutionsgleichungen in § 54 voraus, dass $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ Functionen von $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$ sowohl als auch von x_p sind, während die eben erhaltenen Integralgleichungen nur eine von diesen Variablen, nämlich x_p, enthalten. Der Grund davon ist der, dass die Hülfsgleichungen, welche $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ geben, keine Variationen dieser Grössen, die von $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$ abhängig sind, enthalten. Somit stehen die Grössen u in derselben Beziehung zu den Gleichungen wie die Grössen a und daher wird das Hülfssystem noch befriedigt werden, wenn $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ durch $p-1$ von einander unabhängige Functionen von $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$, z. B. also durch $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$ selbst ersetzt werden.

Wenn dann die auf diese Weise erhaltenen Gleichungen als Substitutionsgleichungen für $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ betrachtet werden, so fällt das Element dx_p aus der Differentialgleichung weg, und wenn wir durch den Factor M, d. h. durch $e^{\int\left(-\frac{P}{W_p}\right)dx_p}$ dividiren, so fällt die Variable x_p weg. Die Differentialgleichung nimmt also dann die Form an:

*) Das Hülfssystem ist symmetrisch in Bezug auf sämmtliche Variablen der ursprünglichen Gleichung; wenn daher W_p verschwinden sollte und W_q verschwindet nicht, so kann die gewünschte Reduction der Differentialgleichung dadurch bewerkstelligt werden, dass man x_q und dx_q an Stelle von x_p und dx_p zum Wegfall bringt, d. h. dass dieselben nicht mehr explicit vorkommen.

$$\Omega_1 = U_1 du_1 + U_2 du_2 + \cdots + U_{p-1} du_{p-1} = 0,$$

wo $U_1, U_2, \ldots, U_{p-1}$ Functionen von $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$ allein sind.

Wir können somit den folgenden **Satz** aussprechen:

Wenn die Coefficienten der totalen Differentialgleichung

$$\Omega = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = 0$$

Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ von solcher Beschaffenheit sind, dass die Determinante Δ aus den Elementen

$$a_{i,j} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 2n)$$

nicht verschwindet, so kann die Differentialgleichung in eine andere

$$\Omega_1 = U_1 du_1 + U_2 du_2 \cdots + U_{2n-1} du_{2n-1} = 0,$$

wo $U_1, U_2, \ldots, U_{2n-1}$ Functionen von $u_1, u_2, \ldots, u_{2n-1}$ allein sind, transformirt werden und zwar mit Hülfe der Substitutionen:

$$u_1 = J_1, \quad u_2 = J_2, \ldots, u_{2n-1} = J_{2n-1}.$$

Hierin sind die Grössen $J_1, J_2, \ldots, J_{2n-1}$ Functionen der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}$, welche derart bestimmt sind, dass

$$J_1 = a_1, \quad J_2 = a_2, \ldots, J_{2n-1} = a_{2n-1}$$

$2n-1$ unabhängige Integrale des zur ursprünglichen Differentialgleichung $\Omega = 0$ gehörigen Pfaff'schen Hülfssystems, nämlich Integrale der Gleichungen

$$(15) \qquad \frac{dx_1}{W_1} = \frac{dx_2}{-W_2} = \frac{dx_3}{W_3} = \cdots = \frac{dx_{2n-1}}{W_{2n-1}} = \frac{dx_{2n}}{-W_{2n}}$$

sind. Und die Relation zwischen den Grössen Ω und Ω_1 wird dargestellt durch:

$$\Omega = \Omega_1 e^{\int\left(-\frac{P}{W_{2n}}\right) dx_{2n}},$$

wo P, die Quadratwurzel aus Δ, die aus den Coefficienten $X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$ gebildete Pfaff'sche Function ist.

Eine ähnliche Herabminderung der Anzahl der Differentialelemente in der Differentialgleichung um eine Einheit kann bewerkstelligt werden mit Hülfe der Substitutionen:

$$f_1 = J_1, \quad f_2 = J_2, \ldots, \quad f_{2n-1} = J_{2n-1},$$

wo $J_1, J_2, \ldots, J_{2n-1}$ dieselben Grössen sind wie vorher, und

$f_1, f_2, \ldots, f_{2n-1}$ $2n-1$ von einander unabhängige (aber sonst willkürliche) Functionen von

$$u_1, u_2, \ldots, u_{2n-1}$$

sind.

Bevor wir zum nächsten Falle übergehen, möge bemerkt werden, dass dem Pfaff'schen Hülfssystem eine sehr einfache (von Cayley herrührende) symbolische Form gegeben werden kann. Ersetzen wir X_m durch $a_{0,m}$ für jeden der Indices m, so erhalten wir:

$$W_r = \sum_{s=1}^{p} a_{0,s}[s+1, s+2, \ldots, s-1]$$
$$= [0, 1, 2, \ldots, p],$$

wo in der Reihe $0, 1, 2, \ldots, p$ die Zahl r wegzulassen ist; und somit:

$$(-1)^r W_r = [r+1, r+2, \ldots, p, 0, \ldots, r-1].$$

Das Hülfssystem (15) nimmt nunmehr nach Weglassung eines Factors -1 die Form an:

$$\frac{dx_1}{[2, 3, 4, \ldots, p, 0]} = \frac{dx_2}{[3, 4, \ldots, p, 0, 1]} = \frac{dx_3}{[4, 5, \ldots, p, 0, 1, 2]} = \cdots$$
$$= \frac{dx_p}{[0, 1, 2, \ldots, p-1]}$$

im allgemeinen Falle; und für den speciellen Fall $p=4$ haben die Gleichungen die Form:

$$\frac{dx_1}{[2, 3, 4, 0]} = \frac{dx_2}{[3, 4, 0, 1]} = \frac{dx_3}{[4, 0, 1, 2]} = \frac{dx_4}{[0, 1, 2, 3]}.$$

§ 61.

Es möge nun p immer noch wie bisher eine gerade ganze Zahl sein, es werde aber vorausgesetzt, dass Δ verschwindet, also:

$$\Delta = \sum_{s=2}^{p} a_{1,s}[s+1, s+2, \ldots, p, 2, \ldots, s-1] = 0,$$

wo rechts den allgemeinen Gesetzen in § 59 gemäss auch andere äquivalente Summationen genommen werden können.

Es sind zwei Fälle zu erörtern, 1) der Fall, in welchem nicht sämmtliche aus den Grössen $a_{i,j}$ bestehende Pfaff'sche Functionen von der Ordnung $p-2$ verschwinden; 2) der Fall, wo sie sämmtlich verschwinden.

§ 62.

Im ersteren Falle müssen nothwendig mindestens zwei der Grössen W_r auf der rechten Seite von (14) von Null verschieden sein; denn jede Pfaff'sche Function von der Ordnung $p-2$ kommt in dem Systeme der W zweimal an complementären Stellen vor, d. h. wenn sie vorkommt als Coefficient von X_i in W_j, so kommt sie auch (vom Vorzeichen abgesehen) als Coefficient von X_j in W_i vor. Es sei W_p eine der nichtverschwindenden Grössen W; wäre dieselbe Null, so würde der einzige Unterschied darin bestehen, dass wir versuchen würden, aus dem Ausdruck von Ω eine andere Variable mit demselben Index wie eine der nichtverschwindenden Grössen W zum Wegfall zu bringen, so dass sie darin nicht mehr explicit auftritt.

Wird nun X_r in Ω um eine willkürliche variable Grösse λ_r vermehrt, so bleiben die Grössen $a_{i,j}$ ungeändert, wofern nicht r gleich i oder j ist und dann ist:

$$a'_{r,s} = a_{r,s} + \frac{\partial \lambda_r}{\partial x_s},$$

so dass:

$$\begin{aligned}\Delta' &= \sum_{s=1}^{p} a'_{r,s}[s+1,\ s+2,\ \ldots,\ p,\ 1,\ \ldots,\ s-1]\\ &= \sum_{s=1}^{p}\left(a_{r,s}+\frac{\partial \lambda_r}{\partial x_s}\right)[s+1,\ s+2,\ldots,p,\ 1,\ldots,s-1]\\ &= \sum_{s=1}^{p}\frac{\partial \lambda_r}{\partial x_s}[s+1,\ s+2,\ \ldots,\ p,\ 1,\ \ldots,\ s-1],\end{aligned}$$

weil $\Delta = 0$ ist. Da λ_r eine willkürliche Grösse ist, so kann Δ' nur verschwinden, wenn die Coefficienten der Ableitungen von λ_r sämmtlich verschwinden, und dies sind diejenigen Pfaff'schen Functionen von der Ordnung $p-2$, welche in W_r vorkommen. Mindestens zwei der Grössen W in (14) verschwinden nicht; es seien dies W_p und wenigstens eine andere, die wir als W_r nehmen können.

Wir haben daher ein neues, (14) analoges System von Gleichungen von der Form:

$$(-1)^{n-1} P' y_n' = W_n';$$

und diese geben:

$$\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_p}\right)' = (-1)^n \frac{W_n'}{W_p'} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1)$$

$$\frac{1}{\mu'} = -\frac{W_p'}{P'}.$$

Wir gelangen nun zu den früheren Gleichungen, indem wir die willkürliche Grösse λ gleich Null setzen. Die $p-1$ Gleichungen, welche die neuen Werthe von $\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_p}\right)'$ geben, werden dann dieselben wie die Gleichungen (15), welche somit auch unter den gegenwärtigen Verhältnissen noch gelten. Die modificirte Form von P' aber ist P, dessen Werth Null ist, und W_p' geht über in W_p und ist nicht Null; demnach ist die modificirte Form von μ', welche das ursprüngliche μ ist, gleich Null und daher (§ 54):

$$\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial x_p} = 0,$$

so dass M unabhängig von x_p ist. Berücksichtigt man dann die Entstehung von M in § 54, so folgt, dass M entweder eine Konstante oder eine Function von $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ ist.

Wir schliessen daher:

Der Satz des § 60 ist noch gültig, wenn die Determinante Δ verschwindet, und die Gleichungen (15) bleiben als Hülfssystem für die gewünschte Reduction bestehen, vorausgesetzt, dass wenigstens zwei der Grössen W von Null verschieden sind. Die Folge des Verschwindens von Δ ist nur, dass Ω in Ω_1 transformirt wird, ohne dass man irgend einen x_p enthaltenden Integralfactor wegheben müsste, denn ein solcher Factor kann dann nicht vorkommen.

Wenn einige der Grössen W_n in den Hülfsgleichungen verschwinden, so brauchen wir nur das evidente Resultat hiervon formell zu erwähnen, nämlich dass dann die entsprechenden Variablen in Ω nicht transformirt zu werden brauchen. Denn in einem solchen Falle ist ein Integral des Hülfssystems gegeben durch

$$u_n = x_n.$$

Beispiel 1. Die von Monge (a. a. O. § 45, S. 533; ein Integraläquivalent derselben wird von ihm in drei Gleichungen gebildet) gegebene Gleichung

$$\Omega = x_2 dx_1 + x_3 dx_2 + x_1 dx_3 + x_4 dx_4 = 0$$

fällt unter diesen Fall, denn Δ ist Null und das Hülfssystem ist

$$\frac{dx_1}{x_4} = \frac{dx_2}{x_4} = \frac{dx_3}{x_4} = \frac{dx_4}{x_1 + x_2 + x_3}.$$

Integrale dieses Systems sind:

$$u_1 = x_1 - x_2$$
$$u_2 = x_1 - x_3$$
$$u_3 = 3x_4^2 - (x_1 + x_2 + x_3)^2$$

und alsdann:

$$\Omega = \frac{1}{3}(2u_2 - u_1)du_1 - \frac{1}{3}(u_1 + u_2)du_2 + \frac{1}{6}du_3.$$

Beispiel 2. Analoges gilt für die Gleichung:

$$\Omega = 0 = \{(x_1 + a)s + x_1^2\}dx_1 + \{(x_2 + a)s + x_2^2\}dx_2$$
$$+ \{(x_3 + a)s + x_3^2\}dx_3 + \{(x_4 + a)s + x_4^2\}dx_4,$$

worin a eine Constante und s den Ausdruck $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ bezeichnet. Man findet, dass die Determinante Δ verschwindet, dass das Hülfssystem drei Integrale hat, als welche genommen werden können:

$$u_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$
$$u_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$
$$u_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3,$$

und dass

$$\Omega = \frac{1}{2}u_1 du_2 + a u_1 du_1 + \frac{1}{3}du_3$$

ist.

Beispiel 3. Es kann vorkommen, dass Δ verschwindet, weil sämmtliche Elemente einer Reihe in ihr gleich Null sind; z. B. können $a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,p}$ sämmtlich verschwinden. Diese geben die Relationen:

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_r} = \frac{\partial X_r}{\partial x_1} \qquad (r = 2, 3, \ldots, p).$$

Demnach giebt es eine Function u von solcher Beschaffenheit, dass

$$X_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}$$
$$X_r = \frac{\partial u}{\partial x_r} + v_r$$

ist, wo v_r unabhängig von x_1 ist, aber eine Function von $x_2, x_3, \ldots, x_p$ sein kann. Alsdann ist

$$\Omega = du + v_2 dx_2 + v_3 dx_3 + \cdots + v_p dx_p.$$

Auf diese Weise ist die gewünschte Reduction ausgeführt und der Multiplicator M ist 1.

§ 63.

Im zweiten Falle, in welchem sämmtliche Pfaff'schen Functionen von der Ordnung $p-2$ ebenso wie Δ verschwinden, muss es eine niedrigere Ordnung geben, für welche die Pfaff'schen Functionen nicht sämmtlich verschwinden; denn es ist vorausgesetzt, dass die Grössen $a_{s,t}$ nicht sämmtlich verschwinden. Diese Ordnung sei m und es werde angenommen, dass $[1, 2, \ldots, m]$, $[2, 3, \ldots, m+1]$ und andere dieser Ordnung nicht verschwinden, dass aber sämmtliche Pfaff'schen Functionen des Systems von der $m+2^{\text{ten}}$ und von höherer (gerader) Ordnung verschwinden.

Wir können das Resultat von § 62 anwenden. Werden $m+1$ neue Variablen $u_2, u_3, \ldots, u_{m+2}$ eingeführt, welche Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_p$ von solcher Beschaffenheit sind, dass, wenn wir die Werthe von $x_2, x_3, \ldots, x_{m+2}$ in Ω substituiren, das Glied mit dx_1 fortfällt, so erhalten wir:

$$\Omega = M(U_2 du_2 + U_3 du_3 + \cdots + U_{m+2} du_{m+2}) + \sum_{r=m+3}^{p} Y_r dx_r$$

und die Grösse M ist unabhängig von x_1. Es soll nun gezeigt werden, dass Y_r $(r = m+3, \ldots, p)$ explicit unabhängig von x_1 ist, so dass es also eine Function von $u_2, \ldots, u_{m+2}, x_{m+3}, \ldots, x_p$ allein ist.

Durch Vergleichung der beiden Ausdrücke für Ω erhalten wir:

$$Y_r = X_r + \sum_{s=2}^{m+2} X_s \frac{\partial x_s}{\partial x_r}$$

für die Werthe $m+3, \ldots, p$ für r. Hieraus:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y_r}{\partial x_1} = \frac{\partial X_r}{\partial x_1} &+ \sum_{s=2}^{m+2} \frac{\partial X_r}{\partial x_s}\frac{\partial x_s}{\partial x_1} \\ &+ \sum_{s=2}^{m+2} \frac{\partial x_s}{\partial x_r}\left(\frac{\partial X_s}{\partial x_1} + \frac{\partial X_s}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_s}{\partial x_{m+2}}\frac{\partial x_{m+2}}{\partial x_1}\right) \\ &+ \sum_{s=2}^{m+2} X_s \frac{\partial^2 x_s}{\partial x_1 \partial x_r}.\end{aligned}$$

Da aber dx_1 in dem zweiten Ausdrucke für Ω fehlt, so haben wir:

$$0 = X_1 + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \cdots + X_{m+2}\frac{\partial x_{m+2}}{\partial x_1}.$$

Nimmt man nun die vollständige Ableitung beider Seiten in Bezug

auf x_r und subtrahirt man von dem Werthe von $\frac{\partial Y_r}{\partial x_1}$ die rechte Seite der abgeleiteten Gleichung, so findet man leicht (nach einer ähnlichen Anordnung der Glieder wie in § 55) die Gleichung:

$$\frac{\partial Y_r}{\partial x_1} = a_{r,1} + a_{r,2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \cdots + a_{r,m+2}\frac{\partial x_{m+2}}{\partial x_1}$$
$$+ \sum_{s=2}^{m+2} \frac{\partial x_s}{\partial x_r}\left(a_{s,1} + a_{s,2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \cdots + a_{s,m+2}\frac{\partial x_{m+2}}{\partial x_1}\right).$$

Nach den §§ 60 und 62 sind aber die Werthe der Functionen $x_2, \ldots, x_{m+2}$ bestimmt durch Gleichungen von der Form:

$$\frac{dx_1}{W_1} = \frac{dx_2}{-W_2} = \frac{dx_3}{W_3} = \cdots = \frac{dx_{m+2}}{-W_{m+2}},$$

wo die Grössen W, definirt wie in § 59, von der Form sind:

$$W_r = \sum_{s=1}^{m+2} X_s[s+1,\, s+2,\, \ldots,\, s-1],$$

und, wie in den andern Fällen, ist W_1 von 0 verschieden, während die Grösse μ im gegenwärtigen Falle verschwindet.

Nun zeigt ein Blick auf die Gleichungen für den besonderen Fall, welche dieselben sind wie (8) in dem allgemeinen Falle, abgesehen davon, dass, wie eben bemerkt, μ verschwindet, dass der Coefficient jedes der Glieder $\frac{\partial x_s}{\partial x_r}$ $(s = 2, \ldots, m+2)$ in $\frac{\partial Y_r}{\partial x_1}$ verschwindet, so dass

$$\frac{\partial Y_r}{\partial x_1} = a_{r,1} + a_{r,2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \cdots + a_{r,m+2}\frac{\partial x_{m+2}}{\partial x_1}$$

ist. Substituirt man auf der rechten Seite für die verschiedenen Ausdrücke $\frac{\partial x_2}{\partial x_1}, \frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \ldots$ ihre Werthe ausgedrückt durch die Grössen W, so ergiebt sich aus den Eigenschaften der Pfaff'schen Functionen leicht, dass

$$W_1\frac{\partial Y_r}{\partial x_1} = \sum_{s=2}^{m+2} X_s[1, 2, 3, \ldots, s-1, r, s+1, \ldots, m+2]$$

ist.

Die Coefficienten von X_s auf der rechten Seite sind aber sämmtlich Pfaff'sche Functionen von der Ordnung $m+2$, welche nach unserer Anfangs gemachten Voraussetzung verschwinden; demnach

haben wir, da W_1 nicht verschwindet, $\frac{\partial Y_r}{\partial x_1} = 0$, d. h. die Coefficienten Y_r werden explicit unabhängig von der Veränderlichen x_1, wenn die Substitutionen ausgeführt sind. Daher:

Wenn sämmtliche Pfaff'schen Functionen von höherer als der m^{ten} Ordnung verschwinden, so braucht man nur Gleichungen für $m + 2$ Variable analog denjenigen in § 62 anzuwenden und auf diese Weise die ersten $m + 2$ Glieder des Differentialausdrucks durch Einführung von neuen durch diese Gleichungen bestimmten Variablen auf $m + 1$ Glieder zu transformiren. Wird diese Transformation mit Hülfe dieser Variablen durch den ganzen Ausdruck Ω ausgeführt, so werden sämmtliche Coefficienten explicit unabhängig von derjenigen Variablen, deren Differentialelement zum Wegfall gebracht ist, so dass es nicht mehr explicit vorkommt*).

§ 64.

Für den Fall, wo p eine gerade ganze Zahl ist, sind nunmehr sämmtliche Möglichkeiten erörtert und es hat sich das folgende allgemeine **Resultat** ergeben:

Ein Differentialausdruck Ω, welcher eine gerade Anzahl von Differentialelementen enthält, kann stets in einen andern transformirt werden, welcher die nächstniedrigere ungerade Anzahl von Differentialelementen enthält; die für diese Transformation nothwendigen neuen Variabeln werden wie in den §§ 60, 62, 63 bestimmt, je nach den Eigenschaften der Coefficienten in Ω; und die neuen Coefficienten sind derart, dass sie, abgesehen von einem (etwaigen) gemeinsamen Factor, nur die (geringere Anzahl von) neuen Variablen enthalten.

Diese Transformation, durch welche die gerade Anzahl von Differentialelementen um eine Einheit reducirt wird, kann die gerade Reduction genannt werden und es ist dabei im Gedächtniss zu behalten, dass durch diese gerade Reduction die Anzahl der Variablen, welche in den neuen Coefficienten (abgesehen von dem etwaigen ge-

---

*) Die Wirkung des Verschwindens von Δ und seiner Minoren auf die Form des reducirten Normaläquivalents von Ω wird später discutirt werden (§ 117 u. ff.; § 144 u. ff.). Zweck des gegenwärtigen Kapitels ist es, die Möglichkeit der Reduction in den Umrissen der ursprünglichen Pfaff'schen Abhandlung zu zeigen.

meinschaftlichen Factor) vorkommen, ebenfalls um eine Einheit herabgemindert wird.

Diese gerade Reduction ferner ist nicht die einzige ihrer Art. Zum Zwecke der Transformation werden nämlich gewisse neue Variablen eingeführt, welche aus der Integration gewisser Differentialgleichungen sich ergeben. Obwohl nun alle Lösungen dieser Differentialgleichungen einander functional äquivalent sind, so können doch die Formen derselben verschieden sein und daher können verschiedene Systeme von neuen Variablen eingeführt werden, die unter sich in einem gewissen functionalen Zusammenhange stehen und deren jedes zu einer geraden Reduction führt.

§ 65.

In dem Falle, wo p eine **ungerade** ganze Zahl ist, verschwindet die Determinante Δ identisch, welches auch die Werthe der Grössen X sein mögen, so dass also der in § 61 eingeschlagene Gang, bei welchem eine vor der Hand nicht verschwindende Determinante gebildet wurde, nicht mehr zum Ziele führt.

Nun verschwinden aber im Allgemeinen die ersten Minoren von Δ nicht, so dass die Werthe der Grössen y_r unendlich sind. Anstatt diese unendlichen Werthe zu nehmen, welche zur Bestimmung der Werthe der Grössen $\frac{\partial x_r}{\partial x_p}$ dienen, kehren wir zu den Gleichungen (4) und (8) zurück und behalten von diesen Gleichungen (8) alle bei bis auf die letzte, welches die durch Multiplication mit dem Factor μ transformirte Gleichung (4) ist. Ist μ nicht Null, so kann die letzte Gleichung von (8) beibehalten werden; ist dagegen $\mu = 0$, so nehmen wir (4) an Stelle dieser letzten Gleichung.

Indem wir diese Fälle der Reihe nach betrachten, haben wir zunächst aus dem vollständigen System (8) die Relation:

$$\mu \sum_{r=1}^{p} X_r A_{r,p} = 0,$$

wo $A_{r,p}$ der Minor von $a_{r,p}$ in der Determinante Δ ist, und somit, da μ nach Voraussetzung nicht Null ist:

$$\sum_{r=1}^{p} X_r A_{r,p} = 0,$$

oder, wenn wir für $A_{r,p}$ seinen Werth substituiren:

$$\sum_{r=1}^{p} X_r [r+1, r+2, \cdots, r-1] = 0.$$

Ist zweitens $\mu = 0$, so lösen wir die ersten $p-1$ Gleichungen von (8) auf und substituiren die daraus sich ergebenden Werthe von $\frac{\partial x_r}{\partial x_p}$ in (4); multipliciren wir dann mit $[1, 2, 3, \ldots, p-1]$, welches im Allgemeinen nicht Null ist, so gelangen wir wieder zu der im ersten Falle erhaltenen Bedingung.

Es ergiebt sich daher, dass, wenn die Hülfsgleichungen ein in sich verträgliches System bilden sollen, die Bedingung

$$\sum_{r=1}^{p} X_r [r+1, r+2, \ldots, r-1] = 0$$

erfüllt sein muss.

§ 66.

Ist diese Bedingung erfüllt, so enthält das System nur höchstens $p-1$ von einander unabhängige Gleichungen und diese reichen nicht aus, um μ und die $p-1$ Ableitungen nach x_p zu bestimmen.

Um $\Omega = 0$ in eine Gleichung zu transformiren, welche eine Variable weniger enthält und in der das Differentialelement dieser Variablen nicht vorkommt, verfahren wir wie in § 63. Indem wir für den Augenblick die Variation von x_1 weglassen, transformiren wir den Ausdruck

$$X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + \cdots + X_p dx_p$$

in:

$$M(U_2 du_2 + U_3 du_3 + \cdots + U_{p-1} du_{p-1})$$

mittels der Gleichungen:

$$\mu X_2 = a_{2,p} + \qquad a_{2,3} \frac{\partial x_3}{\partial x_p} + a_{2,4} \frac{\partial x_4}{\partial x_p} + \cdots + a_{2,p-1} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu X_p = \qquad a_{p,2} \frac{\partial x_2}{\partial x_p} + a_{p,3} \frac{\partial x_3}{\partial x_p} + \cdots\cdots\cdots + a_{p,p-1} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p}.$$

Ist dann

$$\begin{aligned} \Omega &= X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p \\ &= M(U_2 du_2 + U_3 du_3 + \cdots + U_{p-1} du_{p-1}) + Y_1 dx_1 \end{aligned}$$

und berücksichtigt man jetzt wieder die Variation von x_1, so hat man:

$$Y_1 = X_1 + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + X_3 \frac{\partial x_3}{\partial x_1} + \cdots + X_{p-1} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_1}$$

und ferner:

$$0 = X_p + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_p} + X_3 \frac{\partial x_3}{\partial x_p} + \cdots + X_{p-1} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p}.$$

Aus der ersten erhält man, wie in § 63:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial x_p} = \frac{\partial X_1}{\partial x_p} + \sum_{s=2}^{p-1} \frac{\partial X_1}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial x_p} + \sum_{i=2}^{p-1} X_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_1 \partial x_p}$$

$$+ \sum_{i=2}^{p-1} \frac{\partial x_i}{\partial x_1} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_p} + \frac{\partial X_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_p} + \cdots + \frac{\partial X_i}{\partial x_{p-1}} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p} \right),$$

und aus der letzten:

$$0 = \frac{\partial X_p}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{p-1} \frac{\partial X_p}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{p-1} X_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial x_1 \partial x_p}$$

$$+ \sum_{s=2}^{p-1} \frac{\partial x_s}{\partial x_p} \left(\frac{\partial X_s}{\partial x_1} + \frac{\partial X_s}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_s}{\partial x_{p-1}} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_1} \right).$$

Subtrahirt man die letzte Gleichung von der vorhergehenden, so folgt:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial x_p} = a_{1,p} + \sum_{i=2}^{p-1} a_{1,i} \frac{\partial x_i}{\partial x_p} + \sum_{s=2}^{p-1} \frac{\partial x_s}{\partial x_1} \left\{ a_{s,p} + \sum_{j=2}^{p-1} a_{s,j} \frac{\partial x_j}{\partial x_p} \right\}.$$

Der Coefficient von $\frac{\partial x_s}{\partial x_1}$ auf der rechten Seite ist μX_s. Wir setzen:

$$\Theta = a_{1,p} + a_{2,p} \frac{\partial x_2}{\partial x_p} + a_{3,p} \frac{\partial x_3}{\partial x_p} + \cdots + a_{p-1,p} \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p},$$

so dass ist:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial x_p} = \Theta + \mu \sum_{s=2}^{p-1} X_s \frac{\partial x_s}{\partial x_1}.$$

Substituirt man aus den oben bei der vorbereitenden Transformation benutzten Hülfsgleichungen die Werthe für $\frac{\partial x_2}{\partial x_p}, \ldots, \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p}$, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} \Theta, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, & a_{1,p} \\ \mu X_2, & 0, & a_{2,3}, & \ldots, & a_{2,p} \\ \mu X_3, & a_{3,2}, & 0, & \ldots, & a_{3,p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu X_p, & a_{p,2}, & a_{p,3}, & \ldots, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die am Ende des § 65 angegebene Bedingung, die im gegenwärtigen Falle als erfüllt vorausgesetzt wird, kann aber geschrieben werden in der Form:

$$\begin{vmatrix} \mu X_1, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, & a_{1,p} \\ \mu X_2, & 0, & a_{2,3}, & \ldots, & a_{2,p} \\ \mu X_3, & a_{3,2}, & 0, & \ldots, & a_{3,p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu X_p, & a_{p,2}, & a_{p,3}, & \ldots, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Somit ist

$$\Theta = \mu X_1$$

und daher:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial x_p} = \mu \left\{ X_1 + \sum_{s=2}^{p-1} X_s \frac{\partial x_s}{\partial x_1} \right\} = \mu Y_1,$$

welches die gesuchte Bedingung dafür ist, dass, wenn x_p überhaupt in Y_1 vorkommt, es nur in einem Factor M vorkommen kann, und daher wird Ω transformirt in:

$$M(U_2 du_2 + \cdots + U_{p-1} du_{p-1} + Z_1 dx_1),$$

wo $Y_1 = MZ_1$ und Z_1 explicit unabhängig von x_p ist. Der Differentialausdruck ist somit in der gewünschten Weise transformirt.

Beispiel. Es sei $p = 3$ und die Bedingungsgleichung sei erfüllt, nämlich:

$$X_1[2, 3] + X_2[3, 1] + X_3[1, 2] = 0,$$

welches die bekannte Integrabilitätsbedingung der Gleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 = 0$$

ist. Die Gleichungen zur Fortschaffung von x_3, in ihrer allgemeinsten Form genommen, sind:

$$\mu X_1 = a_{1,3} + a_{1,2} \frac{\partial x_2}{\partial x_3},$$

$$\mu X_2 = a_{2,3} + a_{2,1} \frac{\partial x_1}{\partial x_3},$$

$$0 = X_3 + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_3} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_3}.$$

Nehmen wir $\mu = 0$, so dass die dritte Gleichung infolge der ersten beiden befriedigt wird, so werden die neuen Variablen erhalten durch Integration der Gleichungen:

$$\frac{dx_1}{a_{2,3}} = \frac{dx_2}{a_{3,1}} = \frac{dx_3}{a_{1,2}},$$

und dies ist in der That Bertrand's Methode (§ 16).

Wenn wir jedoch μ nicht gleich Null nehmen, so können wir die erste der drei Gleichungen (denn nur zwei sind von einander unabhängig) weglassen und die zweite zur Bestimmung von μ benutzen; es bleibt dann nur noch eine einzige Gleichung

$$0 = X_3 + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_3} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_3}$$

zu befriedigen übrig. Wir können dann zur Bestimmung von x_1 und x_2 irgend eine Bedingung, welche mit dieser Gleichung nicht im Widerspruch steht, annehmen. Wir können z. B. als Bedingung fordern, dass x_1 nicht verändert werden soll; alsdann werden die ursprüngliche Variable x_1 und die neue Variable, welche aus der Integration von

$$0 = X_3 + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_3}$$

erhalten wird, die beiden neuen Variablen sein, welche zur gewünschten Transformation führen. Dies ist in Wirklichkeit die gewöhnliche (Euler'sche) Integrationsmethode der Gleichung.

Als specielles Beispiel betrachten wir die Gleichung:

$$\Omega = (cx_2 - bx_3)\,dx_1 + (ax_3 - cx_1)\,dx_2 + (bx_1 - ax_2)\,dx_3 = 0.$$

Es ist:

$$a_{1,2} = 2c, \quad a_{2,3} = 2a, \quad a_{3,1} = 2b.$$

Die Hülfsgleichungen sind (nach Weglassung des Factors $\frac{1}{2}$) bei der ersten Methode:

$$\frac{dx_1}{a} = \frac{dx_2}{b} = \frac{dx_3}{c},$$

so dass die neuen Variablen sind:

$$u = \frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b}, \quad v = \frac{x_2}{b} - \frac{x_3}{c},$$

und, wie leicht zu zeigen, ist:

$$\Omega = abc(vdu - udv),$$

also

$$M = abc \quad \text{und} \quad \mu = 0.$$

Gehen wir zur zweiten Methode über und lassen wir x_1 ungeändert, so erhalten wir zur Bestimmung der neuen Variablen die Gleichung:

$$(ax_3 - cx_1)\frac{dx_2}{dx_3} + (bx_1 - ax_2) = 0,$$

so dass wir x_1 und

$$u = \frac{b x_1 - a x_2}{a x_3 - c x_1}$$

als die neuen Variablen nehmen. Alsdann wird, wie man leicht zeigt:

$$\Omega = -\frac{(a x_3 - c x_1)^2}{a} du,$$

daher:

$$M = -\frac{(a x_3 - c x_1)^2}{a}$$

und $\mu \left(= \frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial x_3}\right)$ ist nicht Null.

§ 67.

Wenn die Bedingung des § 65 für das Zusammenbestehen der determinirenden Gleichungen nicht erfüllt ist, dann ist das System dieser Gleichungen nicht in sich verträglich und daher die durch sie zu bestimmende Transformation nicht möglich. Daher kann die allgemeinste Gleichung, welche eine ungerade Anzahl von Differentialelementen enthält, keiner vollständigen geraden Reduction unterworfen werden, d. h. die Anzahl der Differentialelemente kann nicht um eine Einheit in der Weise reducirt werden, dass die Coefficienten dieser Elemente, abgesehen von einem etwaigen gemeinschaftlichen Factor, Functionen der (reducirten Anzahl von) neuen Variablen werden.

Obwohl indessen diese Reduction nicht möglich ist, so lässt sich doch eine andere Transformation ausführen. Wir bezeichnen die $2n - 2$ Glieder von

$$\Omega = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n-2} dx_{2n-2} + X_{2n-1} dx_{2n-1}$$

mit Φ, welcher Ausdruck eine gerade Anzahl von Differentialelementen enthält und sämmtliche Variablen enthalten kann. Wir wenden auf Φ eine gerade Reduction an, indem wir voraussetzen, dass x_{2n-1} sich nicht ändert, so dass die einzigen Variablen, welche transformirt werden, $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-2}$ sind. Dann wird Φ von der Form $M_1 \Phi'$, wo Φ' den Ausdruck

$$U_1 du_1 + U_2 du_2 + \cdots + U_{2n-3} du_{2n-3}$$

bezeichnet.

Von den in Φ' vorkommenden Grössen sind die Variablen $u_1, u_2, \ldots, u_{2n-3}$ Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-2}$ und von jeder sich nicht ändernden Grösse, welche in $X_1, X_2, \ldots, X_{2n-2}$ vorkommen kann, d. h. also im Allgemeinen von x_{2n-1}. Die Coefficienten $U_1, U_2, \ldots, U_{2n-3}$ sind explicite Functionen von $u_1, u_2, \ldots, u_{2n-3}$ und von jeder sich nicht ändernden Grösse, welche in $X_1, X_2, \ldots, X_{2n-2}$

vorkommen kann, d. h. auch von x_{2n-1} im Allgemeinen. Und M_1 ist im Allgemeinen eine Function sämmtlicher in Ω vorkommenden Variablen.

Lassen wir nun die Voraussetzung, dass x_{2n-1} sich nicht ändern solle, die wir eingeführt hatten, um die Form von Φ zu ändern, fallen und nehmen wir die vollständige Variation jener veränderten Form, so erhalten wir:

$$\Omega = M_1(U_1 du_1 + U_2 du_2 + \cdots + U_{2n-3} du_{2n-3}) + X'_{2n-1} dx_{2n-1},$$

wo

$$X'_{2n-1} = X_{2n-1} - M_1\left(U_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n-1}} + U_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_{2n-1}} + \cdots + U_{2n-3} \frac{\partial u_{2n-3}}{\partial u_{2n-1}}\right).$$

Dies möge bezeichnet werden durch:

$$\Omega = M_1 \Omega_1 + X'_{2n-1} dx_{2n-1}.$$

Die auf diese Weise ausgeführte Transformation ist eine unvollständige gerade Reduction, insofern dieselbe nur auf Φ angewandt ist. Mit Rücksicht auf den Umstand, dass die zu transformirende Grösse Ω eine ungerade Anzahl von Variablen enthält, kann man diese Transformation eine ungerade Reduction nennen. Durch diese Reduction wird die Anzahl der Differentialelemente um eine Einheit verringert, aber sie giebt nicht, wie die gerade Reduction, die neuen Coefficienten, bis auf einen etwaigen gemeinschaftlichen Factor, in der Form expliciter Functionen der neuen Variablen allein.

Da die gerade Reduction auf eine Grösse mit einer geraden Anzahl von Differentialelementen wie Φ stets anwendbar ist, so folgt, dass eine Grösse Ω mit einer ungeraden Anzahl von Differentialelementen stets einer ungeraden Reduction unterworfen werden kann.

Und wie früher bei der geraden Reduction ist auch die ungerade Reduction nicht die einzige ihrer Art.

Beispiel. Um die ungerade Reduction von

$$\Omega = x_5 dx_1 + x_1 dx_2 + x_2 dx_3 + x_3 dx_4 + x_4 dx_5$$

auszuführen, nehmen wir die ersten vier Glieder und stellen die Hülfsgleichungen des § 59 für die unvollständige gerade Reduction auf. Wir finden:

$$\frac{dx_1}{x_1 + x_3} = \frac{dx_2}{-x_5} = \frac{dx_3}{x_3} = \frac{dx_4}{-x_2 - x_5}.$$

Setzen wir $\vartheta = \log x_3$, so gehen dieselben über in:

$$\frac{dx_1}{d\vartheta} = x_1 + e^\vartheta$$

$$\frac{dx_2}{d\vartheta} = -x_5$$

$$\frac{dx_4}{d\vartheta} = -x_2 - x_5$$

und somit werden neue Variabeln (§ 60) gegeben durch:

$$x_1 = (u_1 + \vartheta)\, e^\vartheta$$

$$x_2 = u_2 - x_5 \vartheta$$

$$x_4 = u_3 - u_2 \vartheta + \frac{1}{2} x_5 (\vartheta - 1)^2.$$

Gehen wir jetzt zu den vollständigen Variationen über, um die ungerade Reduction zu erhalten, so ist leicht zu zeigen, dass

$$\Omega = x_3(x_5 du_1 + u_1 du_2 + du_3) + X_5' dx_5$$

ist, wo

$$X_5' = u_3 - u_2\vartheta + \frac{1}{2} x_5 (\vartheta - 1)^2 + \frac{1}{2} e^\vartheta (1 - 2u_1\vartheta - 2\vartheta - \vartheta^2)$$

ist. Dies bestätigt den allgemeinen Satz für den besonderen Fall; wir haben:

$$M_1 = x_3, \qquad \Omega_1 = x_5 du_1 + u_1 du_2 + du_3.$$

§ 68.

Wir sind nun im Stande, die Anzahl der Glieder in jedem gegebenen Differentialausdruck auf ein allgemeines Minimum zu reduciren. In besonderen Fällen kann die Anzahl der Glieder in der schliesslichen reducirten Form geringer sein, als nach der Zahl in diesem allgemeinen Minimum erwartet werden sollte; die Möglichkeit eines solchen Resultats hängt von der Erfüllung gewisser Bedingungen ab, deren Betrachtung wir vorläufig verschieben.

Nehmen wir zunächst den Fall, in welchem der zu reducirende Ausdruck Ω eine ungerade Anzahl $(2n - 1)$ von Differentialelementen enthält, etwa:

$$\Omega = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n-2} dx_{2n-2} + X_{2n-1} dx_{2n-1},$$

so wenden wir zunächst auf Ω eine ungerade Reduction an, so dass

$$\Omega = M_1 \Omega_1 + X'_{2n-1} dx_{2n-1}$$

wird.

Nun enthält Ω_1 eine ungerade Anzahl von Differentialelementen $u_1, u_2, \ldots, u_{2n-3}$ und deren Coefficienten sind Functionen dieser

Variablen und (möglicherweise) von x_{2n-1}. Wenden wir daher auf Ω_1 eine ungerade Reduction an, so erhalten wir:

$$\Omega_1 = M_2 \Omega_2 + U'_{2n-3} du_{2n-3} + Y_{2n-1} dx_{2n-1},$$

wo:

$$\Omega_2 = V_1 dv_1 + V_2 dv_2 + \cdots + V_{2n-5} dv_{2n-5}$$

$$U'_{2n-3} = U_{2n-3} - M_2 \left(V_1 \frac{\partial v_1}{\partial u_{2n-3}} + \cdots + V_{2n-5} \frac{\partial v_{2n-5}}{\partial u_{2n-3}} \right)$$

und

$$Y_{2n-1} = - M_2 \left(V_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_{2n-1}} + \cdots + V_{2n-5} \frac{\partial v_{2n-5}}{\partial x_{2n-1}} \right)$$

ist. Die Variablen $v_1, v_2, \ldots, v_{2n-5}$ in Ω_2 sind Functionen von $u_1, u_2, \ldots, u_{2n-4}$, ferner möglicherweise von u_{2n-3} und möglicherweise von x_{2n-1}, falls die letztere in den Coefficienten $U_1, U_2, \ldots, U_{2n-4}$ vorkommt; und die Coefficienten $V_1, V_2, \ldots, V_{2n-5}$ von Ω_2 sind Functionen von $v_1, v_2, \ldots, v_{2n-5}$, ferner möglicherweise von u_{2n-3} und möglicherweise von x_{2n-1}.

Beispiel. So ist z. B. die Modification von Ω_1 in dem letzten Beispiel:

$$\Omega_1 = u_1 dv + du_3 - u_1 \log u_1 dx_5,$$

wo $v = u_2 + x_5 \log u_1$, und daher:

$$\Omega = x_3 u_1 dv + x_3 du_3 + (X_5' - x_3 u_1 \log u_1) dx_5.$$

Wenden wir nun weiter eine ungerade Reduction auf Ω_2 an, welches eine ungerade Anzahl von Differentialelementen enthält, und erinnern wir uns der in Ω_2 vorkommenden Variablen, so erhalten wir ein Resultat, dessen allgemeinste Form ist:

$$\Omega_2 = M_3 \Omega_3 + V'_{2n-5} dv_{2n-5} + U''_{2n-3} du_{2n-3} + Z_{2n-1} dx_{2n-1},$$

wo Ω_3 nur $2n - 7$ Differentialelemente enthält. Gehen wir in dieser Weise weiter, so müssen wir schliesslich zu einer Grösse Ω_{n-1} kommen, welche nur ein einziges Differentialelement, etwa von der Form $P dp_1$ enthält, und der Werth von Ω_{n-2}, welches unreducirt drei Differentialelemente enthält, wird von der Form sein:

$$\Omega_{n-2} = M_{n-1} \Omega_{n-1} + Q_3' dq_3 + R_5' dr_5 + \cdots + T_{2n-1} dx_{2n-1},$$

wenn alle Variationen berücksichtigt werden. Setzen wir dann der Reihe nach für alle Grössen Ω_r ihre Werthe ein, so erhalten wir offenbar ein Resultat von der Form:

$$\Omega = P_1 dp_1 + Q_3 dq_3 + R_5 dr_5 + \cdots + W_{2n-1} dx_{2n-1},$$

denn jedes nicht reducirte Ω hat zwei Differentialelemente weniger als das in der Reihenfolge vorhergehende Ω, nämlich eins, welches durch die Reduction weggefallen ist, und das andere, welches herausgesetzt worden ist, um die unvollständige gerade Reduction auszuführen.

Die reducirte Form von Ω enthält offenbar n Differentialelemente, d. h. $\frac{1}{2}(p+1)$, wo p die ungerade Zahl von Differentialelementen ist, welche in der ursprünglichen Form des Ausdrucks vorkamen, und die Variablen und Coefficienten sind sämmtlich Functionen der ursprünglichen Veränderlichen.

Wir nehmen nun zweitens den Fall, in welchem der zu reducirende Ausdruck Ω eine gerade Anzahl $2n$ von Differentialelementen besitzt, etwa:

$$\Omega = Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + \cdots + Y_{2n-1} dy_{2n-1} + Y_{2n} dy_{2n}.$$

Wir wenden auf Ω eine gerade Reduction an, so dass

$$\Omega = M(X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n-1} dx_{2n-1}) = M\Omega'$$

wird, wo Ω' nur $2n-1$ Differentialelemente enthält und die Coefficienten in Ω' Functionen der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$ sind. Demnach ist also Ω' ein Ausdruck von der im früheren Falle betrachteten Art. Führen wir die vollständige Reduction von Ω', wie in diesem Falle angegeben, aus, so erhalten wir eine reducirte Form, welche $\frac{1}{2}\{(2n-1)+1\}$ d. h. n Differentialelemente enthält, nämlich

$$\begin{aligned}\Omega &= M(P_1 dp_1 + Q_3 dq_3 + \cdots + W_{2n-1} dx_{2n-1})\\ &= P_1' dp_1 + Q_3' dq_3 + \cdots + W_{2n-1}' dx_{2n-1}.\end{aligned}$$

Die reducirte Form von Ω enthält n d. h. $\frac{1}{2}p$ Differentialelemente, wo p die gerade Anzahl von Differentialelementen angiebt, welche in der ursprünglichen Form des Ausdrucks vorkommen.

Es mag bemerkt werden, dass in dem Falle, wo p gerade ist, kein einziges der Differentialelemente der reducirten Form dasselbe ist wie eins in der ursprünglichen Form — stets vorausgesetzt, dass Ω der allgemeinste Ausdruck ist, der möglich ist —, so dass dann $P_1', p_1, Q_3', q_3, \ldots, W_{2n-1}'$ und x_{2n-1} insgesammt p Functionen von $y_1, y_2, \ldots, y_p$ sind, und eine der Variablen in der reducirten Form ist ein Integral des ersten Hülfssystems. In dem Falle aber, wo p ungerade ist, ist eins der Differentialelemente in der reducirten Form dasselbe wie eins in der ur-

sprünglichen Form, so dass dann $P_1, p_1, Q_3, q_3, \ldots$ und W_{2n-1} insgesammt p Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sind.

Wir haben nunmehr bewiesen, dass es möglich ist, einen Ausdruck, welcher p Differentialelemente enthält, auf einen andern zu reduciren, welcher entweder $\frac{1}{2}p$ oder $\frac{1}{2}(p+1)$ Differentialelemente enthält. Wir werden später andere und weniger mühselige Methoden, diese Reduction auszuführen, angeben unter der Voraussetzung, dass diese Möglichkeit bereits bewiesen ist, wie dies im Vorstehenden geschehen, und diese Methoden werden gerade den Umstand in Betracht ziehen, dass die reducirte Form nicht die einzige ihrer Art ist infolge des Mangels an Eindeutigkeit in den aufeinanderfolgenden Stadien der Reduction, wie sie durch die vorhergehende Methode ausgeführt wird.

Beispiel. Als einfache Erläuterung des allgemeinen Resultats können wir einen von Jacobi*) in Bezug auf die Gleichung

$$\Omega = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = 0$$

aufgestellten Satz herleiten.

Die Anwendung einer geraden Reduction auf den Ausdruck Ω ergiebt:

$$\Omega = M(U_1 du_1 + U_2 du_2 + U_3 du_3) = M\Omega',$$

wo U_1, U_2, U_3 Functionen von u_1, u_2, u_3 allein sind und M eine Function von x_1, x_2, x_3, x_4 sein kann, während u_1, u_2, u_3 durch Integration der Gleichungen (§ 60)

$$\frac{dx_1}{[2,3,4,0]} = \frac{dx_2}{[3,4,0,1]} = \frac{dx_3}{[4,0,1,2]} = \frac{dx_4}{[0,1,2,3]}$$

bestimmt sind. Letztere, welches drei gewöhnliche Differentialgleichungen ersten Grades sind, erfordern zu ihrer Befriedigung drei Integrale und diese drei Integrale werden als u_1, u_2, u_3 genommen (§ 60).

Wird eine ungerade Reduction auf Ω' angewandt, so bleibt eine der Variablen, etwa u_3, ungeändert und es ergiebt sich ein Resultat von der Form:

$$\Omega' = N dv + V_3 du_3.$$

Hiernach kann die Gleichung $\Omega = 0$ ersetzt werden durch

$$N dv + V_3 du_3 = 0.$$

Setzen wir nunmehr u_3 constant, so geht die Gleichung über in $N dv = 0$, d. h. $dv = 0$ und daher wird ein Integraläquivalent der

*) Crelle's J. Bd. 29, S. 253; vgl. auch Cayley, Crelle's J. Bd. 57, S. 273—277.

Gleichung durch eine einzige Gleichung gegeben. Nun ist die Relation $u_3 =$ const. eins der Integrale des Hülfssystems und daher folgt: Wenn eins der Integrale des Hülfssystems der Gleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = 0$$

dazu benutzt wird, um die Anzahl der Differentialelemente und die Anzahl der Variablen um eine Einheit zu vermindern, so kann die resultirende Differentialgleichung mit nur drei Differentialelementen durch eine einzige Gleichung als ihr integrales Aequivalent dargestellt werden und daher genügen ihre Coefficienten der Integrabilitätsbedingung.

Dies ist der erwähnte Satz. Als specielles Beispiel nehmen wir das Beispiel 1 in § 62. Da eins der Integrale des Hülfssystems

$$u_1 = x_1 - x_2$$

ist, so nehmen wir:

$$x_1 = x_2 + a,$$

wo a eine Constante ist. Wird dieses zur Transformation der Gleichung benutzt, so ist die neue Form:

$$x_2 dx_2 + x_3 dx_2 + (x_2 + a) dx_3 + x_4 dx_4 = 0,$$

welche augenscheinlich integrabel ist.

Es kann noch hinzugefügt werden, dass die soeben angedeutete Methode eins der erfolgreichsten Verfahren ist, um ein Integraläquivalent einer keiner Bedingung unterliegenden Pfaffschen Gleichung zwischen vier Variablen zu erhalten.

§ 69.

Wenn der Differentialausdruck Ω auf die geringstmögliche Anzahl von Gliedern reducirt ist, so kann man ein Integraläquivalent der Gleichung $\Omega = 0$ leicht finden.

1. In dem Falle einer geraden Anzahl ursprünglicher Variablen ist die schliessliche Form der Differentialgleichung:

$$U_1 du_1 + U_2 du_2 + \cdots + U_n du_n = 0,$$

wo die Grössen U und u Functionen der ursprünglichen Variablen sind, zwischen denen keine identische Relation besteht.

Alsdann wird ein Integraläquivalent, welches dem vollständigen Integral bei den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung entspricht, gegeben durch

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2, \quad \ldots, \quad u_n = a_n,$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Constanten sind, und durch diese n Gleichungen wird die Gleichung $\Omega = 0$ befriedigt.

Ein anderes Integraläquivalent, welches dem allgemeinen Integrale bei den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung entspricht, wird gegeben durch:

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$$

$$\frac{1}{U_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = \frac{1}{U_2}\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = \cdots = \frac{1}{U_n}\frac{\partial \varphi}{\partial u_n},$$

wo φ eine willkürliche Function ist. Wiederum besteht das Integral aus n Gleichungen, d. h. so vielen Gleichungen als Differentialelemente in der reducirten Form vorkommen. Und wenn wir, anstatt nur eine einzige willkürliche Functionalbeziehung $\varphi = 0$ zu nehmen, (weniger allgemein) k solche Relationen nehmen, z. B.

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0, \ \ldots, \ \varphi_k = 0,$$

so giebt es $n - k$ andere mit diesen Gleichungen associirte Gleichungen, welches die $n - k$ Gleichungen sind, die die von einander unabhängigen Relationen des Systems

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_1}, & \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_2}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_n} \\ U_1, & U_2, & \ldots, & U_n \end{matrix} \right\| = 0$$

sind.

2. In dem Falle einer ungeraden Anzahl von ursprünglichen Variablen ist die schliessliche Form der Differentialgleichung, wie bewiesen wurde:

$$U_1 dx + U_2 du_2 + \cdots + U_n du_n = 0,$$

wo die Grössen U und u Functionen der ursprünglichen Variablen sind, deren eine x ist.

Alsdann würde ein Integraläquivalent, welches dem vollständigen Integral entspricht, gegeben sein, wenn man

$$u_3 = a_3, \ u_4 = a_4, \ \ldots, \ u_n = a_n$$

und (wenn es nicht möglich sein sollte, $U_1 dx + U_2 du_2 = 0$ zu integriren)

$$\varphi(x, u_2) = 0$$

nebst der Relation

$$\frac{1}{U_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{U_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2},$$

wo φ willkürlich ist, nimmt. Und ein anderes Integraläquivalent (in Wirklichkeit ein allgemeinerer Fall des letzteren) wird gegeben durch

$$\varphi(x, u_2, \ldots, u_n) = 0$$

$$\frac{1}{U_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{U_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2} = \cdots = \frac{1}{U_n}\frac{\partial\varphi}{\partial u_n},$$

wo φ willkürlich ist.

Indessen ist es nicht nöthig, hier die Formen der Lösung zu discutiren, da diese Discussion einen wesentlichen Theil der Theorie von Clebsch bilden wird.

Aufgabe. Man reducire auf ihre kanonische Form und integrire so die Gleichung:

$$x_2 x_3 dx_1 + (x_3 x_1 + x_3 x_4 + x_2 x_3) dx_2 + (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_2 x_4) dx_3 + x_2 x_3 dx_4 = 0$$

(Tanner).

§ 70.

Im Falle einer geraden Anzahl von ursprünglichen Variablen ist die folgende von Jacobi*) herrührende Vereinfachung bemerkenswerth. Jedes der Elemente in der reducirten Form ist ein Integral eines Hülfssystems von der Art wie (10), und somit wird bei jedem der zu machenden Schritte stillschweigend vorausgesetzt, dass ein Hülfssystem zu bilden ist. Durch geeignete Wahl der Integrale der aufeinanderfolgenden Hülfssysteme kann man jedoch die aufeinanderfolgenden Transformationen des Differentialausdrucks umgehen; die leitende Idee hierbei ist die Einführung der sogenannten „Anfangswerthe" der Variablen, auf die zuerst Cauchy und später Hamilton hingewiesen hat, welchem letzteren dieselbe von Jacobi zugeschrieben wird**).

Da die Anzahl der Variablen in dem ursprünglichen Pfaff'schen

---

*) Vgl. die Abhandlung: „Ueber die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Anzahl Variablen auf die Integration eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen". Crelle's J. Bd. 17 (1837), S. 97—162, speciell § 12, S. 156—162, oder Ges. Werke Bd. 4, S. 57—127, insbesondere S. 120—127.

**) Vgl. später die Anmerkung zu § 109.

Ausdruck gerade ist, so besitzt das Hülfssystem von § 60 $2n-1$ Integrale. Dieselben seien:

$$u_r(x_1, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) = \text{const.} = a_r$$

für $r=1, 2, \ldots, 2n-1$. Da die rechte Seite constant ist, so wird ihr Werth nicht geändert, wenn wir irgend einer Variablen einen speciellen Werth beilegen, z. B. x_{2n} den Werth c_{2n}. Diese Werthbeilegung ist eine Beschränkung der Variationen. Da $2n-1$ Gleichungen mit $2n$ Variablen, von denen eine (vorläufig) bestimmt ist, vorhanden sind, so werden die andern ebenfalls bestimmt sein und daher nehmen wir c_i $(i=1, 2, \ldots, 2n-1)$ als die simultanen Werthe von x_i. Hiernach haben wir zunächst:

$$u_r(c_1, c_2, \ldots, c_{2n-1}, c_{2n}) = a_r$$

für $r=1, 2, \ldots, 2n-1$, so dass also $c_1, \ldots, c_{2n-1}$ Functionen von $a_1, \ldots, a_{2n-1}$ und daher Constanten sind, welche, wenn die Werthe von $a_1, \ldots, a_{2n-1}$ in die Formen $u(x_1, \ldots, x_{2n})$ substituirt werden, zu Functionen der Variablen führen und Integralgleichungen bilden. Diese $2n-1$ Integralgleichungen des Hülfssystems können in der Form genommen werden:

$$c_i = v_i(x_1, \ldots, x_{2n}) = v_i \qquad \text{für } i=1, 2, \ldots, 2n-1,$$

wo v_i für $x_{2n}=c_{2n}$ in x_i übergeht*). Und zweitens haben wir die $2n-1$ Gleichungen:

$$u_r(x_1, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) = a_r = u_r(c_1, \ldots, c_{2n-1}, c_{2n}),$$

so dass wir durch Auflösung nach $x_1, \ldots, x_{2n-1}$ erhalten:

$$x_s = f_s(c_1, c_2, \ldots, c_{2n-1}, c_{2n}, x_{2n})$$
$$= f_s(v_1, \ldots, v_{2n-1}, c_{2n}, x_{2n}).$$

Werden diese Werthe in den Ausdruck Ω eingesetzt, so finden wir ein Resultat von der Form:

$$\Omega = B dx_{2n} + \lambda \sum_{i=1}^{2n-1} C_i dv_i.$$

In dieser Form ist aber $B=0$, da die Grössen v_i Integrale des Hülfssystems sind, welche so gewählt sind, dass sie das Verschwinden des Differentialelementes dx_{2n} bewirken, und die Veränderliche x_{2n} kommt explicit, wenn überhaupt, nur in λ vor. Daher:

$$\sum_{i=1}^{2n} X_i dx_i = \Omega = \lambda \sum_{i=1}^{2n-1} C_i dv_i.$$

*) Dieses sind „Hauptintegrale" des Systems.

Nun ist die rechte Seite, abgesehen vielleicht von dem Factor λ, unabhängig von x_{2n}; dieselbe wird daher, ausser vielleicht in dem Factor λ, nicht geändert, wenn man x_{2n} irgend einen speciellen Werth, z. B. den Werth c_{2n} beilegt. Die dann sich ergebenden Werthe von $v_1, \ldots, v_{2n-1}$ sind die Formen dieser Werthe für den speciellen Werth von x_{2n}, nämlich $x_1, \ldots, x_{2n-1}$ resp., und daher:

$$\sum_{i=1}^{2n-1} [X_i]_{x_{2n}=c_{2n}} dx_i = [\Omega]_{x_{2n}=c_{2n}} = [\lambda]_{x_{2n}=c_{2n}} \sum_{i=1}^{2n-1} [C_i]_{v=x} dx_i$$
$$= \lambda' \sum_{i=1}^{2n-1} [C_i]_{v=x} dx_i .$$

Da dies eine Identität ist, so sind die Coefficienten der Differentialelemente auf beiden Seiten dieser Gleichung einander gleich, also:

$$\lambda' [C_i]_{v=x} = [X_i]_{x_{2n}=c_{2n}},$$

ein Resultat, welches die Form von C_i giebt und gleichbedeutend mit dem Resultat ist, welches man durch Substitution erhalten haben würde. Da dasselbe für alle Variablen gilt, so ändern wir die Variablen x_i in v_i und dann geht $[C_i]_{v=x}$ über in C_i. Es gehe λ' in λ'' über, welches somit der Werth von λ ist, wenn wir $v_1, v_2, \ldots, v_{2n-1}, c_{2n}$ für $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}$ substituiren, und es bezeichne V_i die sich ergebende Form von $[X_i]_{x_{2n}=c_{2n}}$, so dass also, wenn diese selben Substitutionen in X_i ausgeführt werden, das Resultat mit V_i bezeichnet wird. Daher:

$$\lambda'' C_i = V_i$$

und somit:

$$\Omega = \lambda \sum_{i=1}^{2n-1} C_i dv_i$$
$$= \frac{\lambda}{\lambda''} \sum_{i=1}^{2n-1} V_i dv_i,$$

wo V_i aus X_i hergeleitet ist, indem man für $x_1, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}$ nur respective $v_1, \ldots, v_{2n-1}, c_{2n}$ setzt.

Es geht hieraus hervor, dass, wenn die Integrale des Pfaff'schen Hülfssystems in der Form der „Hauptintegrale“ genommen werden, der transformirte Ausdruck von Ω (bis auf einen Factor, der in Bezug auf das Integraläquivalent von Ω keine Rolle spielt) aus der ursprünglichen Form von Ω durch blosse Buchstabenvertauschung hergeleitet werden kann.

Um das Integraläquivalent zu erhalten, nehmen wir eine dieser neuen Variablen v als ein Integral (§§ 68, 69), etwa:

$$v_{2n-1} = a_{2n-1};$$

hierdurch geht die Differentialgleichung über in

$$\sum_{i=1}^{2n-2} V_i' dv_i = 0,$$

wo V_i' der Werth von V_i ist, welchen man erhält, wenn man darin a_{2n-1} für v_{2n-1} substituirt, d. h. also der Werth von X_i ist, welcher sich ergiebt, wenn darin $v_1, \ldots, v_{2n-2}, a_{2n-1}, c_{2n}$ für $x_1, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n}$ respective substituirt werden, wobei a_{2n-1} und c_{2n} als Constante gerechnet werden.

Die charakteristische Form der neuen (reducirten) Gleichung ist dieselbe wie die der ursprünglichen Gleichung und die neuen Coefficienten werden durch blosse Buchstabenvertauschung aus den ursprünglichen Coefficienten erhalten, so dass ein grosser Theil der Analyse, welche zu den für die Transformation erforderlichen Gleichungen führt, nach derselben Buchstabenvertauschung auch benutzt werden kann für die nachfolgenden Systeme von Hülfsgleichungen.

Aufgabe. Man zeige, dass, wenn $u_r = a_r$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ n Integralgleichungen sind, welche der Gleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = 0$$

genügen, und wenn n neue Integralgleichungen gebildet werden, indem man mittels jener Gleichungen zunächst $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mittels $x_{n+1}, \ldots, x_{2n}, a_1, \ldots, a_n$ ausdrückt, etwa

$$x_r = f_r(x_{n+1}, \ldots, x_{2n}, a_1, \ldots, a_n)$$
$$(r = 1, 2, \ldots, n),$$

und sodann die Gleichungen

$$X_1 \frac{\partial f_1}{\partial a_r} + X_2 \frac{\partial f_2}{\partial a_r} + \cdots + X_n \frac{\partial f_n}{\partial a_r} + \lambda b_r = 0$$
$$(r = 1, \ldots, n)$$

bildet, die $2n - 1$ Gleichungen, welche sich durch Elimination von λ aus den letzten n Gleichungen und den ursprünglichen n Gleichungen ergeben, Gleichungen mit $2n - 1$ willkürlichen Constanten, nämlich

$a_1, \ldots, a_n, \frac{b_1}{b_n}, \ldots, \frac{b_{n-1}}{b_n}$ sind und das vollständige Integral des Pfaff'schen Hülfssystems für die gerade Reduction der Differentialgleichung darstellen. (Jacobi).

5. Kapitel.

Grassmann's Methode*).

§ 71.

Die Variablen $x_1, \ldots, x_m$ der Pfaff'schen Gleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_m dx_m = 0$$

sind von einander unabhängig und die Coefficienten X sind Functionen der Variablen x. Um die Methoden der „Ausdehnungslehre“ auf diese Gleichung anzuwenden, betrachten wir ein Hauptgebiet von m einfachen Einheiten, etwa $e_1, \ldots, e_m$, und aus diesen und den Variablen bilden wir eine extensive Grösse x in der Form:

---

*) Grassmann's Methode der Behandlung des Pfaff'schen Problems findet sich in den §§ 500—527 der „Ausdehnungslehre“ vom Jahre 1862.

Wir haben das vorliegende Kapitel nur nach langem Zögern aufgenommen, nicht weil wir irgend welchen Zweifel an der Bedeutung des von Grassmann gegebenen Beitrages zur Theorie der Pfaff'schen Gleichung hegten, sondern weil wir fühlten, dass es nicht möglich ist, einen verständlichen Abriss seiner Methode zu geben, ohne entweder eine gewisse Kenntniss der analytischen Methode der Ausdehnungslehre vorauszusetzen, die gegenwärtig wahrscheinlich nicht überall vorhanden ist, oder eine angemessene Darlegung dieser Methode zu geben. Dies letztere würde aber mehr Raum erfordern, als ihm in dem vorliegenden Lehrbuche billigerweise gewährt werden kann, und daher ist das, was im gegenwärtigen Kapitel gefunden wird, wenig mehr als eine Herübernahme der oben erwähnten Abschnitte. Will man dasselbe verstehen, so wird man sich mit Grassmann's analytischer Methode bekannt machen müssen.

Wenn trotz der erwähnten schweren Bedenken dieses Kapitel aufgenommen wurde, so hat dies seinen Grund darin, dass man Grassmann durch Anerkennung der bestimmten Resultate und, in gewissen Einzelheiten, bestimmten neuen Ergebnisse (§ 48), welche durch seine Methode erhalten wurden, Gerechtigkeit widerfahren lassen muss. Was die vorliegende Frage anlangt, so sind seine Resultate stets bemerkenswerth kurz und bündig in der Form, was aus einer Vergleichung mit dem Ausdruck derselben Resultate in andern Methoden hervorgeht; die Schwierigkeit derselben liegt zum Theil in ihrer Deutung, zum Theil in den Beweisen, die nicht immer deutlich entwickelt sind.

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_m e_m,$$

eine Grösse von der Stufenzahl Eins. Wir nehmen ferner die Complemente der Einheiten e, die wir mit $E_1, \ldots, E_m$ bezeichnen, und bilden eine andere extensive Grösse X in der Form:

$$X = X_1 E_1 + X_2 E_2 + \cdots + X_m E_m,$$

eine Grösse von der Stufenzahl $m - 1$. Dann erhalten wir:

$$Xdx = (X_1 E_1 + X_2 E_2 + \cdots + X_m E_m)(e_1 dx_1 + \cdots + e_m dx_m)$$
$$= (-1)^{m-1}(X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \cdots + X_m dx_m),$$

eine Zahlgrösse. Hiernach kann die ursprüngliche Differentialgleichung ersetzt werden durch

$$Xdx = 0,$$

in welcher x eine extensive Grösse ist und X ausgedrückt werden kann als Function von x, dagegen Xdx eine Zahlgrösse ist.

Dieses Resultat enthält die partielle Differentialgleichung erster Ordnung als speciellen Fall. Das Resultat lässt sich ausdehnen auf partielle Differentialgleichungen von höherer Ordnung als der ersten oder, was dasselbe ist, auf Systeme von simultanen Pfaff'schen Gleichungen; und Grassmann zeigt, dass ein ganzes System ersetzt werden kann durch eine einzige Gleichung

$$Xdx = 0,$$

wo x eine extensive Grösse, X eine Function von x und Xdx ebenfalls eine extensive Grösse ist.

§ 72.

Andere mit der Pfaff'schen Gleichung im Zusammenhange stehende Untersuchungen (§ 69) zeigen, dass ihr Integraläquivalent aus einem System simultaner Gleichungen besteht, deren Anzahl, wie wir voraussetzen, die kleinstmögliche ist, infolge deren die Differentialgleichung in der gewöhnlichen Form befriedigt werden kann. Sind dann

$$u_1 = c_1, \; u_2 = c_2, \; \ldots, \; u_n = c_n$$

ein solches System von Gleichungen zwischen Zahlgrössen, infolge deren die Differentialgleichung befriedigt wird, so müssen Grössen U von solcher Beschaffenheit existiren, dass

$$Xdx = U_1 du_1 + U_2 du_2 + \cdots + U_n du_n$$

ist. Denn da das vorstehende System von Integralgleichungen die kleinste Anzahl von Gleichungen ist, infolge deren die Gleichung

$$Xdx = 0$$

befriedigt werden kann, so folgt, dass

$$du_1 = 0, \quad du_2 = 0, \ldots, du_n = 0$$

die kleinste Anzahl exacter Gleichungen ist, infolge deren die Differentialgleichung besteht. Da alle Gleichungen in den Differentialelementen der Variablen linear sind, so kann die ursprüngliche Gleichung nur eine lineare Combination der n exacten Gleichungen sein, so dass es Grössen U geben muss, für welche

$$Xdx = U_1 du_1 + U_2 du_2 + \cdots + U_n du_n$$

ist. Die Elemente du müssen sämmtlich vorkommen, denn sonst würde die Gleichung durch das Verschwinden der wirklich vorkommenden befriedigt werden, d. h. durch ein Integralsystem, welches weniger Glieder enthält*).

§ 73.

Nach der Definition eines Differentialquotienten nach einer extensiven Grösse ist:

$$\frac{du}{dx} dx = du,$$

daher:

$$\sum_{i=1}^{n} U_i du_i = \sum_{i=1}^{n} U_i \frac{du_i}{dx} dx,$$

so dass wir setzen können:

$$X = \sum_{i=1}^{n} U_i \frac{du_i}{dx},$$

und X ist ein Ausdruck mit einer einzigen Lücke. Hieraus ist:

$$\frac{dX}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dU_i}{dx} \frac{du_i}{dx} + \sum_{i=1}^{n} U_i \frac{d^2 u_i}{dx^2},$$

ein Ausdruck mit einer zweifachen Lücke, und in gewissen Theilen desselben, z. B. in jeder Grösse $\frac{d^2 u}{dx^2}$, sind die beiden Lücken vertauschbar.

Gehen wir nun zur Bildung des durch

$$\left[X \left(\frac{dX}{dx}\right)^n\right]$$

*) In Bezug auf die allgemeinere Form des Integralsystems, infolge dessen $\Sigma\, Udu$ verschwindet, vgl. § 142, Anmerkung.

dargestellten lückenhaltigen Products über, so können wir aus $\frac{dX}{dx}$ diejenigen Theile weglassen, welche zwei vertauschbare Lücken haben, weil dieselben zu verschwindenden Grössen führen. Daher:

$$\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^n\right] = \left[\sum U_i \frac{du_i}{dx}\left(\sum \frac{dU_j}{dx}\frac{du_j}{dx}\right)^n\right]$$
$$= \sum\left[U_i \frac{du_i}{dx}\frac{dU_j}{dx}\frac{du_j}{dx}\frac{dU_k}{dx}\frac{du_k}{dx}\cdots\right],$$

wo die Anzahl der verschiedenen Indices $i, j, k, \ldots$ gleich $n+1$ ist und die Klammer das gewöhnliche Gesetz der Multiplication lückenhaltiger Ausdrücke darstellt. Da aber nur n Grössen u und $n+1$ Indices vorhanden sind, so müssen von den Grössen $\frac{du}{dx}$ in jedem der combinatorischen Producte zwei gleiche vorkommen, und daher ist jedes solches Product Null. Demnach verschwindet jedes Glied der obigen Summe und daher ist:

$$\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^n\right] = 0,$$

wenn Xdx wie im letzten Paragraphen darstellbar ist.

Wird das nämliche Verfahren angewendet, um die Form

$$\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1}\right]$$

zu bilden, so können wir im Allgemeinen nicht behaupten, dass sie verschwindet; ebensowenig können wir, wenn wir das Verfahren zur Bildung des Ausdrucks

$$\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^n\right]$$

anwenden, im Allgemeinen behaupten, dass er verschwindet*), dagegen lässt sich leicht zeigen, dass, wenn es zur Bildung von

$$\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n+1}\right]$$

angewendet wird, der Ausdruck verschwinden muss.

§ 74.

Die beiden eben erhaltenen symbolisch durch lückenhaltige Producte dargestellten Gleichungen

$$\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^n\right] = 0, \quad \left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n+1}\right] = 0$$

können durch Zahlgleichungen ersetzt werden.

*) Der Ausdruck verschwindet, wenn die Grössen U und u nicht unabhängig von einander sind; vgl. die Citate in der Anmerkung zu § 63.

Wir betrachten zunächst die erstere. Da X eine und $\frac{dX}{dx}$ zwei Lücken enthält, so ist:

$$\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^n e_\alpha e_\beta \ldots e_\iota e_\vartheta\right] = 0,$$

wo $\alpha, \beta, \ldots, \iota, \vartheta$ irgend $2n+1$ der ganzen Zahlen aus der Reihe $1, \ldots, m$ sind.

Ist zunächst $m \overline{\gtrless} 2n$, so kann wenigstens eine der Grössen e linear ausgedrückt werden durch die übrigen mittels einer Relation, deren Coefficienten Zahlgrössen sind. Daher ist das Product nothwendig Null und es ergiebt sich keine Bedingung.

Ist zweitens $m = 2n+1$, dann giebt es nur eine Gleichung:

$$\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^n e_1, e_2, \ldots, e_{2n+1}\right] = 0.$$

Nun ist, abgesehen von einer Potenz $(-1)^{m+1}$:

$$Xe_\alpha = X_\alpha$$

und daher:

$$\frac{dX}{dx} e_\beta e_\gamma = \frac{d}{dx} X e_\beta e_\gamma = \frac{d}{dx} X_\beta e_\gamma = \frac{\partial X_\beta}{\partial x_\gamma}.$$

Der vorhergehende Ausdruck, welcher ein lückenhaltiges Product ist, ist daher gleich:

$$\sum\left(\pm X_\alpha \frac{\partial X_\beta}{\partial x_\gamma} \cdots \frac{\partial X_\iota}{\partial x_\vartheta}\right) = 0,$$

abgesehen von einem weggelassenen Zahlenfactor, welcher gleich $(2n+1)!$ ist. Die Summation erstreckt sich dabei auf alle möglichen Vertauschungen der Indices aus der Reihe $1, 2, \ldots, 2n+1$, und jedem Gliede ist das positive oder negative Vorzeichen vorzusetzen, je nachdem die Anzahl von Vertauschungen, durch die es hervorging, eine gerade oder ungerade war. Werden die Vertauschungen zu je zweien vorgenommen, derart dass in jedem Paare die Zahl der Vertauschungen einmal gerade, das andere Mal ungerade ist, während die übrigen Indices ausser diesen beiden vertauschten dieselben sind so können wir in einem solchen Falle die Glieder paarweise vereinigen. Haben wir z. B. ein Glied

$$+ X_\alpha \frac{\partial X_\beta}{\partial x_\gamma} \frac{\partial X_\delta}{\partial x_\varepsilon} \cdots \frac{\partial X_\iota}{\partial x_\vartheta},$$

so haben wir noch ein anderes

$$- X_\alpha \frac{\partial X_\gamma}{\partial x_\beta} \frac{\partial X_\delta}{\partial x_\varepsilon} \cdots \frac{\partial X_\iota}{\partial x_\vartheta}$$

und diese beiden addirt geben:

$$+ X_\alpha a_{\beta\gamma} \frac{\partial X_\delta}{\partial x_\varepsilon} \cdots \frac{\partial X_\iota}{\partial x_\vartheta}.$$

Verfahren wir in dieser Weise, so erhalten wir

$$\sum \pm (X_\alpha a_{\beta\gamma} a_{\delta\varepsilon} \ldots a_{\iota\vartheta}) = 0,$$

welches bei den jetzt beschränkten Vertauschungen mit der Jacobischen Bedingung übereinstimmt (§ 65).

Ist drittens $m > 2n + 1$, so haben wir die Gleichung

$$\left[X \left(\frac{dX}{dx}\right)^n e_\alpha e_\beta \ldots e_\iota e_\vartheta\right] = 0,$$

welche gilt für jede Wahl von $2n + 1$ ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \ldots, \iota, \vartheta$ aus der Reihe $1, \ldots, m$, und jede solche symbolische Gleichung führt zu einer Zahlgleichung

$$\sum \pm (X_\alpha a_{\beta\gamma} \ldots a_{\iota\vartheta}) = 0.$$

Daher ist die Anzahl solcher Zahlgleichungen dieselbe wie die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung aus den Elementen $1, \ldots, m$ zur $2n + 1^{\text{ten}}$ Classe. Aber diese Gleichungen sind nicht alle unabhängig von einander, und es reicht aus, nur diejenigen beizubehalten, welche einen speciellen Index, z. B. 1, gemeinschaftlich haben und deren Anzahl somit gleich der Anzahl der Combinationen zur $2n^{\text{ten}}$ Classe aus den $m - 1$ Elementen $2, \ldots, m$ ist.

Die zweite Gleichung in § 73:

$$\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n+1}\right] = 0$$

kann in derselben Weise behandelt werden. Sie führt zu

$$\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n+1} e_1 e_2 \ldots e_{2n+2}\right] = 0$$

für jede Wahl von $2n + 2$ ganzen Zahlen aus der Reihe $1, \ldots, m$.

Ist $m < 2n + 2$, so ist das Product nothwendig Null.

Ist $m = 2n + 2$, dann werden wir wie vorher zu der Zahlgleichung geführt:

$$\sum \pm [a_{1,2} \ldots a_{2n+1, 2n+2}] = 0,$$

wo das Gesetz der Summation dasselbe ist wie vorher.

Ist $m > 2n + 2$, so giebt es für jede Combination eine Zahlgleichung von der für den Fall $m = 2n + 2$ gegebenen Form.

Diese Bedingungen sind nicht unabhängig von der ersten, eine wichtige Eigenschaft, für welche Grassmann zwei Beweise giebt. Wir brauchen dieselben hier nicht zu wiederholen,

vielmehr genügt es anzugeben, dass sein erster Beweis, wenn man seine Ausdrucksweise auf Zahlgrössen überträgt, darauf hinauskommt, die Identität zu beweisen:

$$X_1\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n+1} e_1 \ldots e_{2n+2}\right] = \sum_{i=2}^{2n+2} a_{1,i}\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^n e_{i+1}e_{i+2}\ldots, e_{i-1}\right],$$

wo auf der rechten Seite die Zahl 1 in der Reihe $i+1, i+2, \ldots, i-1$ wegzulassen ist. Der Beweis dieser Identität rechtfertigt jene Behauptung.

Beispiel. Wenn die Pfaff'sche Gleichung

$$\sum_{i=1}^{m} X_i dx_i = 0$$

durch eine einzige Gleichung $u = c$ befriedigt werden kann, so dass sie die Form annimmt:

$$\sum_{i=1}^{m} X_i dx_i = U du = 0,$$

so sind die Bedingungen hierfür dargestellt durch den Verein der Gleichungen, welche in der symbolischen Gleichung

$$\left[X\frac{dX}{dx}\right] = 0$$

enthalten sind, und zwar sind dies, wenn man auf die Zahlgleichungen zurückkehrt, die Gleichungen:

$$X_\alpha a_{\beta\gamma} + X_\beta a_{\gamma\alpha} + X_\gamma a_{\alpha\beta} = 0$$

für jede drei Indices α, β, γ.

§ 75.

Wenn die Bedingungen, welche nothwendig sind dafür, dass die Gleichung

$$Xdx = 0$$

ein aus n Gleichungen bestehendes Integralsystem habe, gefunden sind, so ist der nächste Schritt die Transformation der Zahlgrösse Xdx und, wie bei andern Methoden zur Behandlung der Pfaff'schen Gleichung, geschieht die Transformation schrittweise.

Die extensive Grösse x, welche aus m Einheiten besteht, muss dargestellt werden als eine Function einer anderen aus nur $m-1$ Einheiten ableitbaren extensiven Variablen a und einer veränderlichen Zahlgrösse t, und zwar ist die Transformation derart einzurichten,

dass, wenn man diese Ausdrücke für x in die gegebene Gleichung einführt, dann der Ausdruck Xdx unabhängig von dt und, eventuell bis auf einen Zahlfactor N, auch unabhängig von t wird. Setzen wir dann:

$$dx = d_a x + d_t x,$$

so müssen wir haben:

$$\left.\begin{aligned} Xd_t x &= 0 \\ d_t \frac{1}{N} X d_a x &= 0 \,. \end{aligned}\right\}$$

Führen wir

$$\lambda = \frac{d_t N}{N}$$

ein, so giebt die zweite Gleichung:

$$\lambda X d_a x = d_t (X d_a x) = d_t X d_a x + X d_t d_a x.$$

Ferner erhält man aus der ersten Gleichung

$$0 = d_a (X d_t x) = d_a X d_t x + X d_a d_t x,$$

und da t eine Zahlgrösse, so ist:

$$d_a d_t x = d_t d_a x,$$

daher ergiebt sich durch Subtraction:

$$\begin{aligned} \lambda X d_a x &= d_t X d_a x - d_a X d_t x \\ &= \frac{dX}{dx} d_t x d_a x - \frac{dX}{dx} d_a x d_t x \end{aligned}$$

oder:

$$-\lambda X d_a x = \left[\frac{dX}{dx} d_a x d_t x\right],$$

wo die rechte Seite nunmehr ein lückenhaltiges Product ist, in welchem $\frac{dX}{dx}$ zwei Lücken enthält.

Wir haben daher den **Satz**:

Wenn c irgend eine Grösse von derselben Gattung wie x und $d_a x$ bezeichnet und wenn für jede solche Grösse c die Gleichung

$$-\lambda X c = \left[\frac{dX}{dx} c d_t x\right]$$

erfüllt ist, so ist:

$$X d_t x = 0 \quad \text{und} \quad d_t \frac{1}{N} X d_a x = 0,$$

wo $\frac{d_t N}{N} = \lambda$ ist und von Null verschieden vorausgesetzt wird.

Zunächst haben wir, da die Gleichung

$$-\lambda X c = \left[\frac{dX}{dx} c d_t x\right]$$

für jede Grösse c von der angegebenen Art befriedigt ist, und da $d_t x$ eine solche Grösse ist:

$$-\lambda X d_t x = \left[\frac{dX}{dx} d_t x d_t x\right]$$
$$= 0 .$$

Ferner ist λ eine Zahlgrösse und verschieden von Null; daher:

$$X d_t x = 0 ,$$

wodurch die erste Gleichung bewiesen ist. Aus derselben folgt:

$$0 = d_a X d_t x + X d_a d_t x$$
$$= \frac{dX}{dx} d_a x d_t x + X d_a d_t x .$$

Substituiren wir dann weiter in der Gleichung, welche für die Grössen c erfüllt ist, für c eine Grösse $d_a x$, welche von der verlangten Gattung ist, so erhalten wir:

$$-\lambda X d_a x = \left[\frac{dX}{dx} d_a x d_t x\right]$$
$$= \frac{dX}{dx} d_a x d_t x - \frac{dX}{dx} d_t x d_a x ,$$

und diese führt, von dem eben erhaltenen Resultate subtrahirt, zu:

$$\lambda X d_a x = X d_a d_t x + \frac{dX}{dx} d_t x d_a x$$
$$= X d_a d_t x + d_t X d_a x$$
$$= X d_t d_a x + d_t X d_a x$$
$$= d_t (X d_a x) ,$$

und daher:

$$d_t \left(\frac{1}{N} X d_a x\right) = 0 ,$$

wodurch die zweite der obigen Gleichungen bewiesen ist. In Wirklichkeit ist der ganze Beweis bloss eine Umkehrung der früheren Untersuchung.

Da

$$X dx = X d_a x + X d_t x$$
$$= X d_a x ,$$

so haben wir:

$$X d_a x = 0$$

und daher, da N eine Zahlgrösse ist, auch:

$$\frac{1}{N} X d_a x = 0 ,$$

eine Gleichung, welche weder t noch dt enthält und daher die transformirte Form von $X dx = 0$ ist.

Es ist daher ersichtlich, dass das Erfülltsein der charakteristischen Gleichung

$$-\lambda Xc = \left[\frac{dX}{dx}\, c d_t x\right]$$

ausreicht, um zur gewünschten Transformation zu gelangen.

§ 76.

Wir gehen nun dazu über, einen Werth von $d_t x$ von solcher Beschaffenheit zu suchen, dass die charakteristische Gleichung

$$-\lambda Xc = \left[\frac{dX}{dx}\, c d_t x\right]$$

für alle Grössen c von derselben Gattung wie x befriedigt, d. h. linear ableitbar ist aus den Einheiten, welche in x vorkommen. Die zu diesem Zwecke angewendete Methode besteht darin, $d_t x$ für eine specielle Grösse c von der passenden Art zu finden und zu zeigen, dass der sich ergebende Werth von $d_t x$ es ermöglicht, die Gleichung für alle derartigen Grössen zu befriedigen.

Zunächst setzen wir voraus, dass die Gleichungen

$$\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1}\right] = 0, \quad \text{und} \quad \left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n}\right] = 0$$

nicht beide erfüllt sind; denn diese sind die Bedingungen dafür, dass die ursprüngliche Pfaff'sche Gleichung $Xdx = 0$ durch $n - 1$ Integrale befriedigt werden könnte; daher $m > 2n - 1$. Ferner würde das System der Gleichungen

$$\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n}\right] = 0,$$

wenn erfüllt, eine Folge des Systems

$$\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1}\right] = 0$$

sein, und daher wird vorausgesetzt, dass

$$\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1}\right] \gtrless 0$$

ist.

§ 77.

Zuerst sei $m = 2n$ und zugleich werde angenommen, dass $\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n}\right]$ nicht verschwindet.

Wie in § 71 bezeichne E_r die complementäre Einheit von e_r, so

dass $[e_r E_r] = 1$ ist. Offenbar ist E_r das Product von $2n - 1$ Einheiten und kann gleich $(-1)^{r-1} e_{r+1} \dots e_{2n} e_1 \dots e_{r-1}$ gesetzt werden.

Da $\frac{dX}{dx}$ ein Ausdruck mit zwei Lücken ist, so ist die Grösse

$$\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} E_r\right]$$

linear in den Einheiten e und daher von derselben Gattung wie x; demnach kann sie in die charakteristische Gleichung (§ 76) eingesetzt werden, welche dadurch die Form annimmt:

$$-\lambda X \left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} E_r\right] = \left[\frac{dX}{dx}\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} E_r\right] d_t x\right].$$

Da X ein Ausdruck mit einer Lücke und $\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} E_r\right]$ eine in den Einheiten lineare Grösse ist, so folgt, dass

$$X\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} E_r\right]$$

eine Zahlgrösse ist und dass sie dargestellt werden kann in der Form:

$$\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} E_r\right].$$

Analog ist die rechte Seite eine Zahlgrösse, welche dargestellt werden kann in der Form:

$$\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n} E_r d_t x\right];$$

und daher wird die Gleichung:

$$-\lambda \left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} E_r\right] = \left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n} E_r d_t x\right]$$

$$= \left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n} E_r \sum_{t=1}^{2n} e_i d_t x_i\right].$$

Nun haben wir, wenn i von r verschieden ist:

$$[E_r e_i] = 0$$

und ferner:

$$[E_r e_r] = (-1)^{2n-1}[e_r E_r] = -1,$$

somit erhalten wir:

$$\lambda \left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} E_r\right] = \left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n}\right] d_t x_r.$$

Da der Coefficient von λ auf der linken Seite eine Zahlgrösse ist und $2n - 1$ Indices enthält, so wird derselbe (numerisch ausgedrückt) eine algebraische Summe dividirt durch $(2n-1)!$ sein; analog ist der Coefficient von $d_t x_r$ auf der rechten Seite (wenn numerisch

dargestellt) eine algebraische Summe dividirt durch $(2n)!$. Setzen wir also:

$$\mu = \frac{(2n)!\,\lambda}{\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^n\right]} \frac{1}{(2n-1)!} = \frac{2n\lambda}{\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^n\right]},$$

so erhalten wir:

$$d_t x_r = \frac{\mu}{2n}\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} E_r\right] \tag{1}$$

und daher:

$$d_t x = \sum_{i=1}^{2n} e_i\, d_t x_i$$

$$= \frac{\mu}{2n}\sum_{i=1}^{n} e_i \left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} E_i\right]$$

$$= \mu\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1}\right], \tag{I}$$

welche Gleichung einen Werth von $d_t x$ ergiebt.

§ 78.

Es muss nun gezeigt werden, dass dieser Werth von $d_t x$, in die Gleichung für c eingesetzt, dieselbe identisch erfüllt, welche Grösse von der geeigneten Gattung auch immer für c gesetzt werden möge.

Da X eine Lücke und $\frac{dX}{dx}$ zwei Lücken hat, so hat das lückenhaltige Product $\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1}\right]$ $2n-1$ Lücken, während $2n$ Einheiten e vorhanden sind. Demnach ist es eine Zahlgrösse, wenn seine Lücken durch irgend ein System sämmtlicher Einheiten bis auf eine ausgefüllt werden. Da somit eine Einheit übrig bleibt, so können wir zu $\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1}\right]$ einen Einheitsfactor hinzufügen und diesem Factor eine Lücke geben, ohne die Bedeutung jener Grösse zu ändern, und daher:

$$\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1}\right] = \left[lX\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1}\right]$$

$$= -\left[Xl\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1}\right]$$

$$= -\frac{1}{2n}\sum_{\alpha=1}^{2n}\left[Xe_\alpha\left[l\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1}E_\alpha\right]\right]$$

$$= -\frac{1}{2n}\sum_{\alpha=1}^{2n} Xe_\alpha\left[l\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1}E_\alpha\right],$$

da Xe_α eine Zahlgrösse ist. Somit erhalten wir, wenn wir dies in den Werth (I) von $d_t x$ substituiren:

$$\left[\frac{dX}{dx} e_r d_t x\right] = -\frac{\mu}{2n} \sum_{\alpha=1}^{2n} X e_\alpha \left[\frac{dX}{dx} e_r \left[l\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} E_\alpha\right]\right]$$

$$= -\frac{\mu}{2n} \sum_{\alpha=1}^{2n} X e_\alpha \left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^n e_r E_\alpha\right).$$

Nun ist aber:

$$\text{für } \alpha \gtrless r: \qquad [e_r E_\alpha] = 0$$

$$\text{für } \alpha = r: \qquad [e_r E_r] = 1,$$

daher:

$$\left[\frac{dX}{dx} e_r d_t x\right] = -\frac{\mu}{2n} X e_r \left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^n\right]$$

$$= -\lambda X e_r,$$

nach Substitution des Werthes von μ. Dies gilt für jeden Index r, und da jede Grösse c von der angegebenen Art von der Form ist:

$$c = \sum_{r=1}^{2n} e_r y_r,$$

wo die y Zahlgrössen sind, so hat man:

$$\left[\frac{dX}{dx} c d_t x\right] = -\lambda X c,$$

oder der Werth von $d_t x$ löst allgemein die Gleichung für c und genügt daher, um zu der gewünschten Transformation von Xdx zu leiten.

Die Gleichungen (1), welche Zahlgleichungen sind, können auf die nachstehend angegebene Form gebracht werden. Es ist:

$$(-1)^{r-1} E_r = e_1 e_2 \ldots e_{r-1} e_{r+1} \ldots e_{2n}$$

und daher wie in § 74:

$$\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} E_r\right] = \frac{(-1)^{r-1}}{(2n-1)!} \sum \pm (X_1 a_{2,3} \ldots a_{2n-1,2n})$$

mit den nämlichen Vertauschungen der bei der Summation auftretenden Indices, wobei nur der Index r fehlt. Für $n = 3$ z. B. hat man:

$$\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 E_1\right] = \frac{1}{120} \{X_2 (a_{3,4} a_{5,6} - a_{3,5} a_{4,6} + a_{3,6} a_{4,5})$$

$$- X_3 (a_{2,4} a_{5,6} - a_{2,5} a_{4,6} + a_{2,6} a_{4,5})$$

$$+ X_4 (a_{2,3} a_{5,6} - a_{2,5} a_{3,6} + a_{2,6} a_{3,5})$$

$$- X_5 (a_{2,3} a_{4,6} - a_{2,4} a_{3,6} + a_{2,6} a_{3,4})$$

$$+ X_6 (a_{2,3} a_{4,5} - a_{2,4} a_{3,5} + a_{2,5} a_{3,4})\}$$

$$\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 E_2\right] = \frac{-1}{120}\{X_1(a_{3,4}a_{5,6} - a_{3,5}a_{4,6} + a_{3,6}a_{4,5})$$
$$- X_3(a_{1,4}a_{5,6} - a_{1,5}a_{4,6} + a_{1,6}a_{4,5})$$
$$+ X_4(a_{1,3}a_{5,6} - a_{1,5}a_{3,6} + a_{1,6}a_{3,5})$$
$$- X_5(a_{1,3}a_{4,6} - a_{1,4}a_{3,6} + a_{1,6}a_{3,4})$$
$$+ X_6(a_{1,3}a_{4,5} - a_{1,4}a_{3,5} + a_{1,5}a_{3,4})\}$$

u. s. w. Und die Hülfsgleichungen (1) nehmen die Form an:

$$\frac{dx_1}{\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1}E_1\right]} = \frac{dx_2}{\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1}E_2\right]} = \frac{dx_3}{\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1}E_3\right]} = \cdots = \frac{\mu}{2n},$$

und diese stimmt nach den obigen Entwickelungen, wie leicht zu sehen, mit dem ersten Pfaff'schen Hülfssystem, wie solches auf dem gewöhnlichen Wege erhalten wird, überein.

§ 79.

Im Vorhergehenden wurde angenommen, dass $\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^n\right]$ nicht verschwindet. Machen wir jetzt die gegentheilige Voraussetzung, dass

$$\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^n\right] = 0$$

ist, so erhalten wir eine der Hülfsgleichungen von § 77 in der früheren Form

$$\lambda\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1}E_r\right] = \left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^n\right]d_t x_r$$
$$= 0;$$

und hierbei ist der Coefficient von λ nicht Null. Demnach muss λ selbst verschwinden und daher ist N unabhängig von t.

Wenn daher die Transformation möglich ist, so darf man erwarten, dass sie derart sein wird, dass die neue Form von Xdx nicht nur frei von dt sondern auch frei von t ist.

Nun bleiben, gerade wie in dem entsprechenden Falle bei der Reduction der §§ 61—63 mit einer geraden Anzahl von ursprünglichen Variablen, die Hülfsgleichungen (und infolge dessen die Gleichung, welche $d_t x$ giebt) bestehen, obwohl dieselben unter einer Annahme erhalten wurden, welche nicht mehr gültig ist, d. h. wir haben für $m = 2n$:

$$d_t x = \mu\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1}\right],$$

auch wenn die Pfaff'sche Function $\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^n\right]$ verschwindet (§ 74). Der Beweis ist folgendermassen:

Wir haben für diesen Werth von $d_t x$:

$$X d_t x = \mu X \left[X \left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1}\right]$$
$$= \mu \left[X^2 \left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1}\right].$$

Bilden wir dieses lückenhaltige Product wie in § 73, so erhalten wir darin $n+1$ Factoren mit nur n Grössen $\frac{du}{dx}$, so dass jedes Glied eine gewisse Grösse $\frac{du}{dx}$ mindestens zweimal enthält und daher verschwinden muss. Daher verschwindet die Summe und wir erhalten:

$$X d_t x = 0,$$

die erste der wesentlichen Gleichungen.

Ferner erhalten wir aus dem Werthe von $d_t x$ wie in § 78:

$$\left[\frac{dX}{dx} e_r d_t x\right] = -\frac{\mu}{2n} X e_r \left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^n\right] = 0,$$

und daher ist für jede Grösse c von derselben Gattung wie x:

$$\left[\frac{dX}{dx} c d_t x\right] = 0.$$

Auch $d_a x$ ist von dieser Art und daher:

$$\left[\frac{dX}{dx} d_a x d_t x\right] = 0,$$

d. i.

$$\frac{dX}{dx} d_a x d_t x - \frac{dX}{dx} d_t x d_a x = 0,$$

und daher:

$$d_a X \,.\, d_t x - d_t X \,.\, d_a x = 0,$$

woraus wir nach Addition und Subtraction der gleichen Grössen $d_a d_t x$ und $d_t d_a x$ auf der linken Seite erhalten:

$$d_a (X d_t x) - d_t (X d_a x) = 0.$$

Wie vorher bewiesen aber ist:

$$X d_t x = 0,$$

daher:

$$d_t (X d_a x) = 0,$$

so dass $X d_a x$ von t unabhängig ist. Ueberdies ist

$$X dx = X d_a x + X d_t x$$
$$= X d_a x,$$

so dass also die durch die Gleichung

$$d_t x = \mu \left[X \left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} \right]$$

bestimmte Transformation die neue Form von Xdx nicht nur von dt, sondern auch, im Falle $\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^n\right] = 0$ ist, von t unabhängig macht.

§ 80.

Die Gleichung

$$d_t x = \mu \left[X \left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} \right]$$

bestimmt die Ableitungen $d_t x_1, \ldots, d_t x_{2n}$ und μ. Da dieselbe aber nur $2n$ Gleichungen äquivalent ist, so kann man eine der Grössen als unbestimmt bleibend und daher als willkürlich annehmbar betrachten. Wir setzen $t = x_{2n}$, dieselbe Voraussetzung, welche bei den andern Methoden zur Behandlung der Pfaff'schen Gleichung gemacht wurde. Setzt man dies in die für $r = 2n$ geltende Gleichung (1) des § 77 ein, so ergiebt sich:

$$\mu = \frac{2n dx_{2n}}{\left[X \left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} E_{2n} \right]}.$$

Es sei

$$y = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_{2n-1} e_{2n-1},$$

daher:

$$y = x - x_{2n} e_{2n},$$

ferner:

$$\begin{aligned} dx_{2n}\, y &= dx_{2n} x - e_{2n} dx_{2n} \\ &= \frac{2n dx_{2n}}{\left[X \left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} E_{2n} \right]} \left[X \left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} \right] - e_{2n} dx_{2n} \end{aligned}$$

oder:

$$\frac{dy}{dx_{2n}} = \frac{2n}{\left[X \left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} E_{2n} \right]} \left[X \left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} \right] - e_{2n}.$$

Substituiren wir auf der rechten Seite $y + x_{2n} e_{2n}$ für x, so wird sie eine Function von y und x_{2n}.

Diese Gleichung giebt nach Integration das Resultat zunächst in der Form

$$y = a + x_{2n} \varphi,$$

wo φ eine Function von y, x_{2n} und a ist, und wo a der Werth von y für $x_{2n} = 0$ d. h. der Werth von x für $x_{2n} = 0$ ist, und daher nur $2n - 1$ der Einheiten enthält. Danach erhalten wir a in der Form:

$$\begin{aligned} a &= \text{Function von } y \text{ und } x_{2n} \\ &= \text{Function von } x \text{ und } x_{2n} \end{aligned}$$

nach Substitution des Werthes von y.*)

§ 81.

Die Zahlgrösse N, in der x_{2n} vorkommt, wenn es überhaupt irgendwo vorkommt, werde durch $N(x)$ bezeichnet, wenn sie ausgedrückt ist als Function von x. Wir haben:

$$x = a + x_{2n}(\varphi + e_{2n}),$$

und daher:

$$d_a x = da + x_{2n} d_a \varphi.$$

Nun geht die transformirte Gleichung, welche

$$\frac{1}{N} X d_a x = 0$$

ist, hiernach über in:

$$\frac{1}{N(x)} X(x)\,(da + x_{2n} d_a \varphi) = 0.$$

Die linke Seite aber ist unabhängig von x_{2n} und behält daher die nämliche Form, welcher Werth auch x_{2n} beigelegt werden möge. Wenn dieser Grösse der Werth Null beigelegt wird, so geht x über in a und die Gleichung ist:

$$\frac{1}{N(a)} X(a)\,da = 0;$$

oder, wenn man den Zahlenfactor $N(a)$ abwirft und A für $X(a)$ schreibt, so wird:

$$A\,da = 0.$$

---

*) Dies ist ein schwacher Punkt in der Grassmann'schen Methode, wenn man dieselbe nicht bloss von rein theoretischem Standpunkte betrachtet; denn die Form der Function ist eine unendliche Reihe, welche durch Umkehrung einer Taylor'schen Reihe entsteht, und es wird nicht bewiesen, dass die Reihe convergirt. Aber auch wenn die Reihe convergirte, so ist doch die Form des so gefundenen Integrals derart, dass dieser Schritt der Methode unausführbar wird, und dies wird so bleiben müssen, bis irgend eine andere Methode für die Integration einer Differentialgleichung, deren abhängige Variable eine extensive Grösse ist, gefunden ist.

Die Grösse a enthält nur $2n - 1$ der Einheiten; somit ist die Gleichung transformirt und enthält nur $2n - 1$ veränderliche Zahlgrössen.

Es ist leicht ersichtlich, dass die extensive Gleichung

$$a = \text{Function von } x \text{ und } x_{2n}$$

zu $2n - 1$ Zahlgleichungen von der Form

$$a_i = \text{Function von } x_1, \ldots, x_{2n}$$

führt, so dass diese $2n - 1$ Gleichungen einem Systeme von Integralen des gewöhnlichen Hülfssystems äquivalent sind. Ihre Form entspricht der Form, in welcher Jacobi (§ 70) das Hülfssystem nahm, nämlich bei der Einführung der Hauptintegrale, eine Correspondenz, die von Grassmann direct beabsichtigt war.

§ 82.

Wir nehmen nun $m > 2n$; dann ist

$$\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^n\right] = 0, \quad \left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1}\right] \gtrless 0.$$

Die charakteristische Gleichung, deren Erfülltsein die Transformation von Xdx möglich macht, ist:

$$\left[\frac{dX}{dx} c d_t x\right] = \lambda X c,$$

wo c von derselben Gattung ist wie x. Setzt man der Reihe nach $c = e_1, \ldots, e_m$ und schreibt man:

$$G_s = \left[\frac{dX}{dx} e_s d_t x\right] - \lambda X e_s,$$

so wird die charakteristische Gleichung ersetzt durch:

$$G_1 = G_2 = \cdots = G_m = 0.$$

Zunächst nehmen wir an, dass $\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^n\right]$ nicht verschwindet und dass daher λ ebenfalls nicht verschwindet.

Es seien $e_1, \ldots, e_{2n}, e_r$ irgend $2n + 1$ der m Einheiten für $r = 2n + 1, \ldots, m$. Man bezeichne $[e_1, \ldots, e_{2n}, e_r]$ mit E und nehme für F_s das Product sämmtlicher e's in E ausser e_s, so dass $[e_s F_s] = E$, und endlich bezeichne a_s den Zahlenausdruck

$$\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^n F_s\right].$$

Alsdann ist:

$$\sum a_s G_s = \sum \left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^n F_s\right]\left[\frac{dX}{dx} e_s d_t x\right] - \lambda \sum X c_s \left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^n F_s\right]$$

$$= -(2n+1)\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n+1} E d_t x\right] - \lambda(2n+1)\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^n E\right].$$

Wir haben aber:

$$\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^n\right] = 0 \quad \text{und} \quad \left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n+1}\right] = 0,$$

daher verschwindet die rechte Seite und es ist:

$$\sum a_s G_s = 0.$$

Hieraus folgt, dass es eine Zahlgleichung zwischen $2n+1$ der Gleichungen $G = 0$ giebt und, wenn man die Einheiten anders wählt, dass überhaupt zwischen jeden $2n+1$ von diesen Gleichungen eine Zahlbeziehung existirt.

Es kann vorkommen, dass für eine gewisse Wahl der $2n+1$ Einheiten einige der Grössen a Null sind; indessen kann dies nicht für alle Combinationen zutreffen, da sonst im Widerspruch zur Voraussetzung $\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^n\right]$ verschwinden würde. Daher müssen einige der Gleichungen $2n+1$ Glieder G enthalten und somit können wir ein System von $2n$ der Grössen $G_1, \ldots, G_m$, etwa $G_1, \ldots, G_{2n}$, derart wählen, dass die übrigen $m - 2n$ aus jenem System numerisch ableitbar sind.

Wir haben daher nur $2n$ Zahlgleichungen, welche unabhängig von einander sind und die Grössen $d_t x_1, d_t x_2, \ldots, d_t x_m$ und λ enthalten. Wie vorher ersetzen wir λ durch eine entsprechende Grösse μ und lösen die Gleichungen nach den Grössen $d_t x_i$ auf. Da nur $2n$ Gleichungen vorhanden sind, können auch nur $2n$ der Grössen definit bestimmt werden; die mit den übrigen verbundenen werden gleich Null gesetzt. Die auf diese Weise bestimmten seien $d_t x_1, \ldots, d_t x_{2n}$, alsdann werden $x_{2n+1}, \ldots, x_m$ als Constante betrachtet. Die $2n$ Gleichungen sind nun Gleichungen in μ und $d_t x_1, \ldots, d_t x_{2n}$; werden dieselben in gleicher Weise behandelt wie das System in § 80, so gelangen wir zu

$$d_t(e_1 x_1 + \cdots + e_{2n} x_{2n}) = \mu\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} e_1 \ldots e_{2n}\right),$$

und daher, da $d_t x_r = 0$ für $r = 2n+1, \ldots, m$ ist, so haben wir:

$$d_t x = \mu\left[X\left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} e_1 \ldots e_{2n}\right].$$

Diese Gleichung wird wie vorher integrirt; das Integral enthält eine extensive Constante a, welche den Werth von x für t (das gleich

x_{2n} sein sollte) gleich Null ist; und wenn man dieses in die ursprüngliche Gleichung substituirt, so gelangt man zu einer Gleichung von der Form

$$A\,d\,a = 0,$$

wo A die nämliche Function von a wie X von x ist und die neue Grösse a nur $m - 1$ Einheiten, nämlich $e_1, \ldots, e_{2n-1}, e_{2n+1}, \ldots, e_m$ enthält.

Es war vorausgesetzt, dass $\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^n\right]$ von Null verschieden ist. Wenn dies nicht der Fall, also

$$\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^n\right] = 0,$$

daher $\lambda = 0$ und somit N unabhängig von t ist, so beweisen wir wie in § 79, dass

$$d_t x = \mu \left[X \left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} e_1 \ldots e_{2n}\right],$$

welches der Werth in dem vorigen Falle ist, noch richtig und hinreichend ist, um die gewünschte Transformation auszuführen. Denn mit diesem Werthe erhalten wir für $s = 1, \ldots, m$:

$$\begin{aligned}\left[\frac{dX}{dx} e_s d_t x\right] &= \mu \left[\frac{dX}{dx} e_s \left[X \left(\frac{dX}{dx}\right)^{n-1} e_1 \ldots e_{2n}\right]\right] \\ &= -\frac{\mu}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X e_i \left[\left(\frac{dX}{dx}\right)^n e_s E_i\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

bei der gegenwärtigen Voraussetzung. Da dies für jede der m Einheiten richtig ist, so erhalten wir nach Bildung von $d_a x$ die Gleichung

$$\left[\frac{dX}{dx} d_a x\, d_t x\right] = 0$$

und daher:

$$\frac{dX}{dx} d_a x\, d_t x - \frac{dX}{dx} d_t x\, d_a x = 0.$$

Ferner wie im früheren Falle:

$$X d_t x = 0.$$

Von hier aus ist der Rest des Beweises wie zuvor und man gelangt zu dem Resultat, dass

$$X d_a x = 0$$

unabhängig von t und dt und durch $m - 1$ Einheiten dargestellt ist.

Hiernach gelangen wir durch die aus der Integration der Gleichung

$$d_t x = \mu \left[X \left(\frac{dX}{dx} \right)^{n-1} e_1 \ldots e_{2n} \right]$$

abgeleitete Transformation von der Gleichung $Xdx = 0$, wo x eine extensive Grösse mit m Einheiten ($m > 2n$) ist, zu der Gleichung

$$Ada = 0,$$

wo a eine extensive Grösse ist, die nur $m - 1$ Einheiten enthält, und A dieselbe Function von a ist wie X von x.

§ 83.

Die Gleichung

$$\left[X \left(\frac{dX}{dx} \right)^n \right] = 0$$

ist identisch erfüllt, welches immer auch der Werth von x sein möge. Ersetzen wir daher x durch a und X durch A, wo A die nämliche Function von a wie X von x ist, so haben wir:

$$\left[A \left(\frac{dA}{da} \right)^n \right] = 0.$$

Ist nun $m - 1$, die Anzahl der Einheiten in a, grösser als $2n$, so können wir die vorhergehende Methode anwenden zur Transformation von $Ada = 0$ in $Bdb = 0$, wo b nur $(m - 1) - 1 = m - 2$ Einheiten enthält und B dieselbe Function von b wie A von a und somit wie X von x ist, und wir erhalten:

$$\left[B \left(\frac{dB}{db} \right)^n \right] = 0.$$

Fahren wir in derselben Weise weiter fort, so können wir die Gleichung reduciren, bis die extensive Variable k nur $2n$ Einheiten enthält, und sie nimmt dann die Form an:

$$Kdk = 0,$$

wo K dieselbe Function von k wie X von x ist, und zwar kann diese Reduction ausgeführt werden unter der Voraussetzung, dass

$$\left[X \left(\frac{dX}{dx} \right)^n \right] = 0$$

ist, Bedingungen, die nothwendig und hinreichend sind.

Wenden wir schliesslich die Methode des § 81 auf diese Gleichung an, so gelangen wir zu einer Gleichung von der Form:

$$Ydy = 0,$$

wo y nur $2n-1$ Einheiten enthält und Y die nämliche Function von y wie X von x ist.

§ 84.

Weiterhin geschieht nun die Grassmann'sche Reduction von $Xdx = 0$ auf die Form $\sum_{i=1}^{n} U_i du_i = 0$ wie bei der Pfaff'schen Methode. Eine der veränderlichen Zahlgrössen in y wird als constant betrachtet, so dass dann die Gleichung $Ydy = 0$ nur $2n-2$ variable Zahlgrössen und daher $2n-2$ Einheiten enthält. Die Reduction des so modificirten Ausdrucks Ydy auf nur $2n-3$ Einheiten geschieht wie in § 81; sodann wird eine der neuen variablen Zahlgrössen constant gesetzt, so dass die Gleichung nun $2n-4$ veränderliche Zahlgrössen und daher $2n-4$ Einheiten enthält und so fort bis zu Ende. Augenscheinlich sind n Reductionen erforderlich, indem jede Reduction eine einer Constanten gleichgesetzte veränderliche Zahlgrösse und daher ein Integral liefert, so dass n Integrale erhalten werden; und alsdann ist die Bildung des Ausdrucks $\Sigma\, U du$, wenn verlangt, nur mehr eine Vergleichung der Coefficienten.

Aufgabe 1. Bezeichnet man durch $[1, \ldots, n]_{2r}$ das System:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x_1}, & \frac{\partial}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ X_1, & X_2, & \ldots, & X_n \\ \frac{\partial}{\partial x_1}, & \frac{\partial}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ X_1, & X_2, & \ldots, & X_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|,$$

worin $2r$ Reihen vorhanden sind und bei der Entwickelung einer Determinante der i^{te} Factor jedes Gliedes aus der i^{ten} Reihe zu nehmen ist, so soll gezeigt werden, dass $[1, \ldots, n]_{2r} = 0$ die Bedingung dafür ist, dass

$$\sum_{i=1}^{n} X_i dx_i$$

auf die Form:

$$du_1 + \sum_{i=2}^{r} v_i du_i$$

reducirbar ist. (Tanner.)

Aufgabe 2. Bezeichnet man mit $[1, \ldots, n]_{2r+1}$ das System:

$$\left\| \begin{array}{cccc} X_1, & X_2, & \ldots, & X_n \\ \frac{\partial}{\partial x_1}, & \frac{\partial}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ X_1, & X_2, & \ldots, & X_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right\|,$$

in welchem $2r + 1$ Reihen vorhanden sind und das Entwickelungsgesetz dasselbe ist wie vorher, so soll man zeigen, dass $[1, \ldots, n]_{2r+1} = 0$ die Bedingung dafür ist, dass

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \, dx_i$$

auf die Form

$$\sum_{i=1}^{r} v_i \, du_i$$

reducirbar ist. (Tanner.)*)

---

*) Diese Resultate finden sich in Prof. Tanner's Abhandlung: „Ueber die Transformation einer linearen Differentialgleichung", Quart. Math. Journ. Bd. 16 (1879) S. 45—64. Wie man sieht, hat ihre Form eine grosse Aehnlichkeit mit derjenigen der Grassmann'schen Bedingungen (§ 73), welches auch der Grund ist, weshalb wir Prof. Tanner's Resultate hier hergesetzt haben.

6. Kapitel.

Natani's Methode.

§ 85.

Um den Differentialausdruck in der Gleichung

$$\text{(I)} \qquad X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + \cdots + X_n dx_n = 0$$

auf einen andern zu transformiren, welcher eine geringere Anzahl von Differentialelementen enthält, führt Natani*) ein System von n Functionen der Variablen $t_1, t_2, \ldots, t_p, u_1, u_2, \ldots, u_q$, wo $p + q = n$ ist, ein, welche an erster Stelle der einzigen Bedingung genügen, dass sie functional von einander unabhängig sind. Dann ist:

$$\sum_{m=1}^{n} X_m \delta x_m = \sum_{r=1}^{p} T_r \delta t_r + \sum_{s=1}^{q} U_s \delta u_s,$$

wo die Variationen der Variablen x irgend welche Grössen sind und die Coefficienten T und U gegeben werden durch

$$T_r = \sum_{m=1}^{n} X_m \frac{\partial x_m}{\partial t_r}$$

$$U_s = \sum_{m=1}^{n} X_m \frac{\partial x_m}{\partial u_s}.$$

Sind die Variationen der Veränderlichen x so beschaffen, dass durch sie die Gleichung (I) erfüllt ist, so sind die zugehörigen Variationen von t und u der Bedingung unterworfen:

$$\sum_{r=1}^{p} T_r dt_r + \sum_{s=1}^{q} U_s du_s = 0.$$

Diese Relation kann durch simultane Gleichungen von zweierlei Art

*) Crelle's J. Bd. 58 (1861) S. 301—328 und Natani, Die höhere Analysis (1866) S. 304—327.

befriedigt werden: α) durch diejenigen, welche man erhält, wenn man die Differentialelemente gleich Null setzt, β) durch diejenigen, welche man erhält, wenn die Coefficienten der Differentialelemente gleich Null gesetzt werden.

Eine Gleichung von der Art (α) besagt, dass die Variable, dessen Differentialelement verschwindet, sich nicht ändert; wir hätten daher:

$$\text{Function } (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.},$$

als eine Relation zur Befriedigung von (I), die somit ein Integral der Differentialgleichung ist.

Eine Gleichung von der Art (β) führt zu einer partiellen Differentialgleichung von der Form:

$$\sum_{m=1}^{n} X_m \frac{\partial x_m}{\partial z} = 0,$$

wenn dz eins der nichtverschwindenden Differentialelemente ist.

Jede homogene Relation unter den neuen Differentialelementen, welche zu einer Gleichung

$$\text{Function } (t_1, t_2, \ldots, t_p, u_1, \ldots, u_q) = \text{const.}$$

führt, betrachten wir als unter (α) enthalten, weil die Substitution ihrer Werthe für $t_1, \ldots, t_p, u_1, \ldots, u_q$ zu einem Integral von (I) führt, wie eben dargelegt wurde.

§ 86.

Wir nehmen dann alle die neuen Variablen, deren Differentialelemente verschwinden, als die Variablen u und alle diejenigen, bei denen die Coefficienten der Differentialelemente verschwinden, als die Variablen t.

Nach der ersten Voraussetzung ist jede der Grössen u ein Integral der Gleichung (I).

Nach der zweiten Voraussetzung giebt es p Gleichungen von der Form:

$$\text{(II)} \qquad \sum_{m=1}^{n} X_m \frac{\partial x_m}{\partial t_r} = 0$$

für $r = 1, 2, \ldots, p$. In der anfänglichen Substitution waren die Grössen $t_1, \ldots, t_p$ functional von einander unabhängig; die Transformation der Differentialgleichung hat keine Relation zwischen ihren Variationen ergeben; daher können sie als p von einander unabhängige Veränderliche betrachtet werden. Da ferner die Gleichung

befriedigt wird, was immer auch die Variationen der Variablen t sein mögen, so folgt, dass die Variablen t als vollständig willkürliche Grössen angenommen werden können, welche nur der einzigen Bedingung unterworfen sind, dass keine identischen Functionalbeziehungen zwischen $t_1, \ldots, t_p, u_1, \ldots, u_q$ existiren. Da wir alsdann

$$\sum_{m=1}^{n} X_m dx_m = 0$$

haben und $t_1, t_2, \ldots, t_p$ die einzigen unabhängigen Veränderlichen sind, so ist:

$$\sum_{m=1}^{n} X_m \frac{\partial x_m}{\partial t_r} = 0$$

für $r = 1, 2, \ldots, p$ und dies ist das System (II). Daher sind das System (II) und die Gleichung (I) äquivalent*) und somit sind $u_1, \ldots, u_q$, welches Integrale von (I) sind, auch Integrale von (II).

§ 87.

Man hat daher schliesslich ein System von Integralgleichungen und ein System von unabhängigen Variablen. Dieses Aggregat von Gleichungen und unabhängigen Variablen ist als die allgemeinste Combination zu betrachten, welche die grösste Anzahl von unabhängigen Variablen und daher die geringste Zahl von Integralgleichungen enthält; denn in jener Combination sind die Variationen der variabelen Grössen die am wenigsten beschränkten. Daher wird die allgemeinste Lösung der Gleichung (I) erhalten, wenn man q zu einem Minimum macht.

Da nun nach den vorhergehenden Schlüssen

$$\text{(III)} \qquad \sum_{m=1}^{n} X_m \delta x_m = \sum_{s=1}^{q} U_s \delta u_s$$

ist, so folgt:

$$\text{(IIIa)} \qquad X_m = \sum_{s=1}^{q} U_s \frac{\partial u_s}{\partial x_m},$$

ein System von n Gleichungen. Dieses kann als zur Bestimmung der

---

*) In Bezug auf ein analoges Resultat in der Theorie der Systeme von exacten Gleichungen vgl. § 22.

(bisher) unbekannten Grössen u und U, deren Anzahl $2q$ ist, dienend betrachtet werden.

Ist $n > 2q$, so dass also mehr Gleichungen als unbekannte zu bestimmende Grössen vorhanden sind, so führt die Elimination von U und u aus dem System (IIIa) zu Relationen zwischen den Grössen X. Wir nehmen gegenwärtig an, dass solche Relationen nicht vorhanden sind, und daher ist $2q$, welches ein Minimum werden soll, so zu wählen, dass es nicht kleiner als n ist.

Ist n eine gerade Zahl, so kann man annehmen, dass die Gleichungen (IIIa) $q\,(=\frac{1}{2}n)$ Grössen u und $q\,(=\frac{1}{2}n)$ Grössen U bestimmen, und daher haben wir für den allgemeinsten Fall, wo die Coefficienten keinen Bedingungen unterliegen:

$$\sum_{m=1}^{2n} X_m \delta x_m = \sum_{s=1}^{m} U_s \delta u_s . \tag{1}$$

Ist n eine ungerade Zahl, so wird der kleinste Werth von q (da $2q$ nicht kleiner als n sein kann) gegeben durch:

$$2q = n + 1 .$$

Es sind daher $\frac{1}{2}(n+1)$ Coefficienten U und $\frac{1}{2}(n+1)$ Variable u aus nur n Gleichungen zu bestimmen und es können daher entweder

(A) $\frac{1}{2}(n+1)$ Coefficienten U und $\frac{1}{2}(n-1)$ Variable u bestimmt werden, während die übrigbleibende Variable unbestimmt bleibt, oder

(B) $\frac{1}{2}(n+1)$ Variable u und $\frac{1}{2}(n-1)$ Coefficienten U bestimmt werden, während der übrigbleibende Coefficient unbestimmt bleibt. In (A) aber kann die unbestimmte Variable nicht eine blosse Constante sein, denn sonst würde das entsprechende Glied nicht vorkommen und es würden nur $n-1$ Grössen U und u durch die n Gleichungen gegeben, so dass also eine Relation zwischen den Grössen X bestehen müsste. Und in (B) kann der Coefficient nicht gleich Null angenommen werden, da sonst das entsprechende Glied nicht vorkommen kann, was zu demselben ungerechtfertigten Schlusse führt wie vorher.

Da wir dasjenige schliessliche System von Variablen suchen, welches die kleinste Anzahl von Integralrelationen enthält, so wählen wir (A) an Stelle von (B), da jenes etwas allgemeiner ist; dasselbe

enthält $\frac{1}{2}(n-1)$ bestimmte Integralrelationen und eine, welche willkürlich ist, während (B) $\frac{1}{2}(n+1)$ bestimmte Integralrelationen enthält.

Ist φ die willkürliche Variable, welche in (A) unbestimmt bleibt, so haben wir:

$$(2) \qquad \sum_{m=1}^{2n+1} X_m \delta x_m = \lambda \delta \varphi + \sum_{s=1}^{n} U_s \delta u_s,$$

wo $\lambda, U_1, \ldots, U_n, u_1, \ldots, u_n$ die $2n+1$ Grössen sind, welche durch die $2n+1$ Gleichungen von der Form (III^a) bestimmt werden.

§ 88.

Wir betrachten zuerst den Fall, in welchem die Anzahl der Variablen in Gleichung (I) ursprünglich gerade ist. Es ist dann:

$$(1) \qquad \Omega = \sum_{m=1}^{2n} X_m \delta x_m = \sum_{s=1}^{n} U_s \delta u_s,$$

wo die Coefficienten U und die n neuen Variablen u Functionen der Variablen $x_1, \ldots, x_{2n}$ und von einander unabhängig sind. Die Integrale der Gleichung $\Omega = 0$ sind:

$$u_1 = \text{const.}, \ldots, u_n = \text{const.},$$

d. h. n der neuen Variablen geben Integrale der Gleichungen und die übrigen n der neuen Variablen $t_1, \ldots, t_n$ kommen nicht explicit in den Integralen vor. Wir haben gesehen, dass die Variablen t unbestimmt und willkürlich und nur der einzigen Bedingung unterworfen sind, dass unter den Grössen u und t keine Functionalbeziehungen existiren.

Die Variablen u sind daher explicit unabhängig von den Variablen t und zu gleicher Zeit Integrale der Gleichungen:

$$\sum_{m=1}^{2n} X_m \frac{\partial x_m}{\partial t_r} = 0$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n).$$

Dieses Resultat ergiebt sich in folgender Weise. Aus der Gleichung $u_s = \text{const.}$ ergiebt sich:

$$0 = \delta u_s = \sum_{m=1}^{2n} \frac{\partial u_s}{\partial x_m} \delta x_m,$$

und da $t_1, \ldots, t_n$ die unabhängigen Veränderlichen sind, so ist:

$$\delta x_m = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial x_m}{\partial t_r} \delta t_r,$$

daher:

$$0 = \sum_{m=1}^{2n} \frac{\partial u_s}{\partial x_m} \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial x_m}{\partial t_r} \delta t_r,$$

oder, da alle Variationen δt_r von einander unabhängig sind:

$$0 = \sum_{m=1}^{2n} \frac{\partial u_s}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_r}$$

für $s = 1, 2, \ldots, n$ und $r = 1, 2, \ldots, n$. Aus diesem letzten System von Gleichungen findet man für jeden Werth von r in eindeutiger Weise Ausdrücke für $\frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial x_2}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial t}$, welche linear sind in $\frac{\partial x_{n+1}}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial x_{2n}}{\partial t}$. Werden diese in

$$\sum_{m=1}^{2n} X_m \frac{\partial x_m}{\partial t}$$

substituirt, so verschwindet der sich ergebende Ausdruck identisch, welches auch die Werthe von $\frac{\partial x_{n+1}}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial x_{2n}}{\partial t}$ sein mögen.

Somit sind $u_1, \ldots, u_n$ Lösungen des Systems von Gleichungen:

$$\sum_{m=1}^{2n} X_m \frac{\partial x_m}{\partial t_r} = 0 \tag{3}$$

und insbesondere sind, da $t_2, t_3, \ldots, t_n$ von t_1 unabhängig sind, $u_1, \ldots, u_n, t_2, \ldots, t_n$ Lösungen von

$$\sum_{m=1}^{2n} X_m \frac{\partial x_m}{\partial t_1} = 0.$$

§ 89.

Bisher haben wir die Frage in der Weise betrachtet, als ob es gelte, Ω auf eine Form zu transformiren, welche die kleinstmögliche Anzahl von Differentialelementen enthält. Um das Integraläquivalent von $\Omega = 0$ zu erhalten, müssen wir die expliciten Formen von $u_1, \ldots, u_n$ haben. Diese (welche unabhängig von $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sind) werden nicht geändert, wenn man den Grössen $t_1, t_2, \ldots, t_n$ passende

besondere Werthe beilegt, und daher nehmen wir in Uebereinstimmung mit dem Resultate von Pfaff (§ 60) an, dass t_1 in Ω nur durch einen Factor V vorkommt, der allen Coefficienten der Differentialelemente gemeinsam ist. Diese Annahme, welche bei den aufeinander folgenden Reductionen wiederholt wird, lässt sich ausdrücken, indem man (beispielsweise) setzt:

$$U_1 = V\alpha_1, \quad U_2 = V\alpha_2, \ldots, \quad U_n = V\alpha_n$$

nebst:

$$V = \frac{1}{t_1}, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{t_2}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{t_2\, t_3}, \ldots, \quad \alpha_n = \frac{1}{t_2\, t_3 \ldots t_n},$$

welche Gleichungen mit allen gemachten Folgerungen und allen geltenden Bedingungen verträglich sind; indessen ist diese Form der Coefficienten natürlich nicht die einzig mögliche.

Ersetzen wir t_1 durch A, so haben wir:

$$\sum_{m=1}^{2n} A\, X_m\, \delta x_m = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s\, \delta u_s, \tag{4}$$

wo die rechte Seite unabhängig von t_1 ist, und die Gleichung, welche $t_2, \ldots, t_n, u_1, \ldots, u_n$ zu Lösungen hat, kann geschrieben werden in der Form:

$$\sum_{m=1}^{2n} A\, X_m \frac{\partial x_m}{\partial t_1} = 0, \tag{5}$$

welche identisch befriedigt wird, wenn die passenden Werthe von x als Functionen von t und andern Variablen substituirt werden.

Nehmen wir nun irgendwelche willkürliche Variationen der Variablen*), so haben wir infolge der Lösungen von Gleichung (5):

$$\delta \left\{ \sum_{m=1}^{2n} A X_m \frac{\partial x_m}{\partial t_1} \right\} = 0,$$

---

*) Diesen Gedanken der Einführung zweier unabhängiger Systeme von Variationen der Variablen hatte vor Natani schon Binet, welcher ihn in seiner Abhandlung „Sur la transformation de Pfaff relative aux fonctions différentielles linéaires contenant un nombre pair de variables", Comptes Rendus Bd. 15 (1842) S. 74—80 auf den Fall einer geraden unbeschränkten Pfaff'schen Function angewendet hatte. Auch die Associirung der Anfangswerthe der Variablen zur Gleichung wird in dieser Abhandlung erörtert und die Transformation auf die Form (4^a) (vgl. § 91) wird ebenfalls angegeben. Binet beschränkte sich jedoch auf dieses Resultat; seine Absicht war, eine zur Zeit der Veröffentlichung seiner Abhandlung neue Transformationsmethode anzugeben.

oder:

$$A\sum_{m=1}^{2n}\frac{\partial x_m}{\partial t_1}\,\delta X_m+\sum_{m=1}^{2n}A X_m\delta\,\frac{\partial x_m}{\partial t_1}+\left(\sum_{m=1}^{2n}X_m\,\frac{\partial x_m}{\partial t_1}\right)\delta A=0,$$

und diese giebt, da das letzte Glied verschwindet:

$$A\sum_{m=1}^{2n}\frac{\partial x_m}{\partial t_1}\,\delta X_m+\sum_{m=1}^{2n}A X_m\delta\,\frac{\partial x_m}{\partial t_1}=0.$$

Da aber $\sum_{s=1}^{n}\alpha_s\delta u_s$ unabhängig von t_1 ist, so haben wir nach (4):

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\sum_{m=1}^{2n}A X_m\delta x_m\right)=0$$

oder:

$$\sum_{m=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial t_1}(A X_m)\delta x_m+\sum_{m=1}^{2n}A X_m\,\frac{\partial}{\partial t_1}\,\delta x_m=0.$$

Nun ist δx_m eine beliebige Variation von x_m, so dass

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\,\delta x_m=\delta\,\frac{\partial x_m}{\partial t_1}$$

ist, und somit erhalten wir aus den beiden letzten Gleichungen:

$$A\sum_{m=1}^{2n}\frac{\partial x_m}{\partial t_1}\,\delta X_m=\sum_{m=1}^{2n}\frac{\partial}{\partial t_1}\,(A X_m)\delta x_m.$$

Ferner:

$$\delta X_m=\sum_{s=1}^{2n}\frac{\partial X_m}{\partial x_s}\,\delta x_s,$$

wo die Variationen δx willkürlich sind, so dass die Coefficienten von δx auf beiden Seiten der resultirenden Gleichung einander gleich sein müssen. Wir erhalten daher aus den Coefficienten von δx_s die Gleichung:

$$A\sum_{m=1}^{2n}\frac{\partial x_m}{\partial t_1}\,\frac{\partial X_m}{\partial x_s}=\frac{\partial}{\partial t_1}\,(A X_s)$$

$$=X_s+A\sum_{m=1}^{2n}\frac{\partial X_s}{\partial x_m}\,\frac{\partial x_m}{\partial t_1}$$

für $A=t_1$ und daher:

$$X_s=A\sum_{m=1}^{2n}a_{m,s}\,\frac{\partial x_m}{\partial t_1}=t_1\sum_{m=1}^{2n}a_{m,s}\,\frac{\partial x_m}{\partial t_1} \tag{6}$$

und diese Gleichung gilt für $s=1,2,\ldots,2n$. Dies ist ein System

von Gleichungen, welches durch die Lösungen von (5) befriedigt wird. Dasselbe enthält die $2n$ Grössen $t_1 \frac{\partial x_m}{\partial t_1}$ und daher wird ein vollständiges Integral des Systems gebildet durch $u_1, \ldots, u_n, t_2, \ldots, t_n$ (welche sämmtlich explicit unabhängig von t_1 sind) und durch die Gleichung:

$$\log t_1 = \int \left\{ \sum_{m=1}^{2n} \left(a_{m,s} \frac{dx_m}{X_s} \right) \right\}.$$

Die letzte Gleichung ist für unsern unmittelbaren Zweck — die Herleitung der Grössen u — nicht erforderlich; daher betrachten wir nur die $2n-1$ andern Integrale. Aus diesen müssen die Grössen $t_2, \ldots, t_m$ beseitigt werden und dies kann durch andere Differentialgleichungen von der Form (5) geschehen.

§ 90.

Die $2n-1$ beibehaltenen Integrale des Systems (6) werden nicht nothwendig in den Formen $u_1, \ldots, u_n, t_2, \ldots, t_n$ auftreten; dieselben seien vielmehr $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2n-1}$, so dass sämmtliche Grössen u und t — und daher auch sämmtliche Coefficienten α in (4) — sich ausdrücken lassen durch die Grössen β. Substituiren wir die Werthe in die rechte Seite von (4), so erhalten wir:

$$\sum_{m=1}^{2n} A X_m \delta x_m = \sum_{s=1}^{2n-1} B_s \delta \beta_s,$$

und daher wird die Differentialgleichung (I) ersetzt durch:

$$\sum_{s=1}^{2n-1} B_s d\beta_s = 0, \tag{7}$$

wo sämmtliche Coefficienten B Functionen der Variablen β allein sind. Sie ist daher eine Gleichung zwischen einer ungeraden Anzahl von Variablen geworden und demnach ist (§ 69) eins ihrer Integrale willkürlich, etwa

$$\varphi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2n-1}).$$

Dieses kann man ohne jede Beeinträchtigung der Allgemeinheit als β_1 nehmen, denn jedes Integral des einen Systems lässt sich ausdrücken durch die Integrale eines andern äquivalenten Systems. Daher nehmen wir β_1 als Integral; da dasselbe von der Form ist:

$$u_1 = \beta_1 = \text{const.},$$

so wird die Gleichung (7) durch Benutzung dieses Integrals auf eine

Gleichung reducirt, welche nur $2n-2$ Variablen, d. h. eine gerade (und kleinere) Anzahl von Variablen enthält, sobald eines der Integrale u_1 der ursprünglichen Differentialgleichung gefunden ist.

Das vorhergehende Verfahren kann nun von neuem angewendet werden; jeder nachfolgende Schritt vermindert die Anzahl der Variablen um zwei und verschafft eines der Integrale u der ursprünglichen Gleichung. Daher werden wir schliesslich nach n Wiederholungen des Verfahrens das System der Integrale $u_1, \ldots, u_n$ der Gleichung finden.

§ 91.

Der gegenwärtige Ausdruck für den transformirten Werth von Ω hängt von der Wahl der individuellen Glieder des Integralsystems der Gleichungen (6) ab. Um den Ausdruck möglichst einfach zu erhalten, wählt Natani die Hauptintegrale (§ 70) für dieses System. Nehmen wir irgend ein System von Integralen, etwa das System der Grössen β, so sind dieselben von der Form:

$$\beta_r(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = \text{const.} = \beta_r,$$

wo die Functionen β_r bekannt sind. Die rechte Seite bleibt ungeändert, wenn wir x_1 einen speciellen Werth und den Variablen $x_2, \ldots, x_{2n}$ die entsprechenden Werthe beilegen. Der specielle Werth von x_1 sei Null (oder, wenn dies nicht angeht, eine Constante) und die entsprechenden Werthe der übrigen Variablen seien $x_2', \ldots, x_{2n}'$ dann ist:

$$\beta_r(0, x_2', x_3', \ldots, x_{2n}') = \text{const.} = \beta_r.$$

Dies ist ein System von $2n-1$ Gleichungen in $2n-1$ Grössen x' und die Gleichungen sind unabhängig von einander; sie geben daher diese Grössen x' als unabhängige Functionen der β und infolge dessen als ein System von Integralen der Gleichungen (6).

Führt man diese Grössen x' als Integrale in die Gleichung (4) ein und beachtet man, dass die u und die α Functionen derselben sind, so erhält man:

$$\sum_{m=1}^{2n} A X_m \delta x_m = \sum_{m=2}^{2n} K_m \delta x_m',$$

wo die Coefficienten K Functionen der Variablen x' allein sind. Die eben erhaltene Gleichung gilt für alle Werthe von $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ und daher für

$$x_1 = 0 \text{ (oder den constanten Werth)}, \; x_2 = x_2', \ldots, x_{2n} = x_{2n}';$$

daher erhalten wir, wenn A' und X' die Werthe von A und X nach Substitution jener Werthe sind:

$$\sum_{m=2}^{2n} A' X_m' \delta x_m' = \sum_{m=2}^{2n} K_m \delta x_m',$$

indem das Glied auf der linken Seite, welches $m = 1$ entspricht, nicht mehr vorkommt. Da die Grössen x_m' functional von einander unabhängig und die Variationen willkürlich sind, so haben wir:

$$K_m = A' X_m',$$

so dass, wenn $x_2', \ldots, x_{2n}'$ bekannt sind, die Coefficienten in dem transformirten Werthe von Ω bis auf einen Factor durch den blossen Anblick sich bestimmen, und das Resultat ist:

$$(4^a) \qquad \Omega = \sum_{m=1}^{2n} X_m \delta x_m = \frac{A'}{A} \sum_{m=2}^{2n} X_m' \delta x_m'.$$

Da nun $x_2', \ldots, x_{2n}'$ ein Integralsystem von (6) ist, so ist das erste der Integrale der Differentialgleichung $\Omega = 0$ wie in § 90 gegeben durch

$$x_2' = \text{const.} = c_1$$

und die zu integrirende Gleichung ist nunmehr:

$$(\mathrm{I}_1) \qquad \Omega_1 = \sum_{m=3}^{2n} X_m' dx_m' = 0,$$

welche nur $2n - 2$ Veränderliche enthält.

Wir verfahren nun in derselben Weise mit (I_1). Das dem System (6) entsprechende System wird gebildet und integrirt, wodurch man ein Resultat erhält von der Form:

$$\gamma_r(x_3', x_4' \ldots, x_{2n}') = \text{const.},$$

wo $r = 1, 2, \ldots, 2n - 3$. Führt man dann die Hauptintegrale des neuen Systems ein, indem man $x_3' = 0$ (oder, wenn dies nicht angeht, gleich einer Constanten) und $x_4' = x_4'', \ldots, x_{2n}' = x_{2n}''$ setzt, so wird das System der Hauptintegrale $x_4'', \ldots, x_{2n}''$ gegeben durch die $2n - 3$ Gleichungen:

$$\gamma_r(x_3', x_4', \ldots, x_{2n}') = \gamma_r(0, x_4'', \ldots, x_{2n}'')$$
$$(r = 1, 2, \ldots, 2n - 3),$$

wo die Function γ_r bekannt ist. Wie vorher, führen diese zu einer Transformation:

$$\sum_{m=3}^{2n} X_m' \delta x_m' = \frac{A_2''}{A_2} \sum_{m=4}^{2n} X_m'' \delta x_m'',$$

wo X_m'' aus X_m' dadurch hervorgeht, dass man

$$x_3' = 0,\ x_4' = x_4'',\ \ldots,\ x_{2n}' = x_{2n}''$$

substituirt, aus X_m also dadurch, dass man

$$x_1 = 0,\ x_2 = c_1,\ x_3 = 0,\ x_4 = x_4'',\ x_5 = x_5'',\ \ldots,\ x_{2n} = x_{2n}''$$

setzt. Man erhält die Grössen X_m'' also gewissermassen durch den blossen Anblick. Das erste der Integrale von $\Omega_1 = 0$ (und daher das zweite der Integrale von $\Omega = 0$) wird, wie vorher, gegeben durch

$$x_4'' = \text{const.} = c_2$$

und die zu integrirende Gleichung ist nunmehr:

$$(\mathrm{I}_2) \qquad \Omega_2 = \sum_{m=5}^{2n} X_m'' dx_m'' = 0\,.$$

Das Verfahren kann nun in analoger Weise auf Ω_2 angewendet werden und so der Reihe nach weiter, bis man schliesslich das System von n Integralen der Gleichung $\Omega = 0$ in der Form erhält:

$$x_2' = c_1,\ x_4'' = c_2,\ x_6''' = c_3,\ \ldots,\ x_{2n}^{(n)} = c_n\,.$$

Bei jedem Schritte kann die Grösse A wie in § 89 durch eine einzige Quadratur erhalten werden und die resultirende schliessliche Form der Transformation von Ω ist offenbar:

$$\sum_{m=1}^{2n} X_m \delta x_m = \frac{A_1'}{A_1} X_2' \delta x_2' + \frac{A_1' A_2''}{A_1 A_2} X_4'' \delta x_4'' + \frac{A_1' A_2'' A_3'''}{A_1 A_2 A_3} X_6''' \delta x_6''' + \cdots$$
$$+ \frac{A_1' A_2'' A_3''' \ldots A_n^{(n)}}{A_1 A_2 A_3 \ldots A_n} X_{2n}^{(n)} \delta x_{2n}^{(n)}\,.$$

Die Coefficienten X_2', X_4'', ... sind aus X_2, X_4, ... so zu sagen durch den blossen Anblick ableitbar, wenn die Werthe der Grössen x', x'', x''', ... bekannt sind. Und diese Werthe werden gegeben durch die Integration der Hülfssysteme (6), deren Anzahl n beträgt, indem für jede Reduction der Anzahl der Variablen in den Grössen Ω ein solches System besteht.

Es dürfte kaum nöthig sein, noch besonders hervorzuheben, dass das System (6) wesentlich dasselbe ist wie die erste Form (8) der Hülfsgleichungen bei der Pfaff'schen Reduction in § 55, und es kann daher ersetzt werden durch das äquivalente Hülfssystem (14) des § 59, welches sich aus der Auflösung der als ein in den Ableitungen von x_1, x_2, ... lineares System betrachteten Gleichungen ergiebt.

§ 92.

Eine beträchtliche Vereinfachung ergiebt sich in jedem Falle, in welchem eine Anzahl der ursprünglichen Coefficienten X, etwa $n - p$, verschwinden*). Dieselben seien

$$X_{n+p+1},\ X_{n+p+2},\ \ldots,\ X_{2n},$$

und von den übrig bleibenden nicht verschwindenden Coefficienten wird angenommen, dass sie Functionen der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ seien.

Sind durch die Integration von p der Hülfssysteme p Integrale gefunden worden in der Form:

$$x_2' = c_1,\ x_4'' = c_2,\ \ldots,\ x_{2p}^{(p)} = c_p,$$

so ist die zu integrirende übrig bleibende Gleichung

$$X_{2p+1}^{(p)} dx_{2p+1}^{(p)} + X_{2p+2}^{(p)} dx_{2p+2}^{(p)} + \cdots + X_{n+p}^{(p)} dx_{n+p}^{(p)} = 0.$$

Für die ursprüngliche Gleichung sind noch $n - p$ Integrale nothwendig; diese werden aber gegeben durch:

$$x_{2p+1}^{(p)} = c_{p+1},\ x_{2p+2}^{(p)} = c_{p+2},\ \ldots,\ x_{n+p}^{(p)} = c_n,$$

so dass nur p Integrationen der Hülfssysteme erforderlich sind.

Dies ist von besonderer Wichtigkeit bei der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Denn wenn die zu integrirende Gleichung ist:

$$p_n = \varphi = \varphi(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1}),$$

so ist:

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_{n-1} dx_{n-1} - \varphi dx_n$$
$$- 0 . dp_1 - 0 . dp_2 - \cdots - 0 . dp_{n-1} = 0,$$

so dass $n - 1$ der Coefficienten X verschwinden und daher nur eine einzige Integration eines Hülfssystems erforderlich ist**).

Beispiel. Als Beispiel zu Natani's Methode betrachten wir die Gleichung:

$$\Omega = x_2 dx_1 + x_3 dx_2 + x_4 dx_3 + x_5 dx_4 + x_6 dx_5 + x_1 dx_6 = 0.$$

Die Gleichungen (6) werden hier:

---

*) Vgl. auch Jacobi, Ges. Werke Bd. 4, S. 125.

**) Vgl. Kapitel 7.

$$x_2 = \frac{t_1}{dt_1}(-dx_2 + dx_6), \quad x_3 = \frac{t_1}{dt_1}(dx_1 - dx_3)$$

$$x_4 = \frac{t_1}{dt_1}(dx_2 - dx_4) \quad , \quad x_5 = \frac{t_1}{dt_1}(dx_3 - dx_5)$$

$$x_6 = \frac{t_1}{dt_1}(dx_4 - dx_6) \quad , \quad x_1 = \frac{t_1}{dt_1}(-dx_1 + dx_5),$$

und aus diesen folgt, dass

$$dt_1 = 0 \quad \text{und} \quad dx_1 = dx_3 = dx_5, \quad dx_2 = dx_4 = dx_6 .$$

Aus der ersteren erhalten wir:

$$t_1 = \text{const.}$$

oder:

$$A = \text{const.},$$

und da A die Variablen nicht enthält, so bleibt, wenn die Hauptintegrale substituirt werden, der Werth von A, d. i. A', ungeändert, daher:

$$\frac{A'}{A} = 1 .$$

Die andern Gleichungen sind indessen in ihrer gegenwärtigen Form nicht genügend. Das vorliegende Beispiel ist eine Erläuterung zu § 62, denn es ist leicht zu verificiren, dass

$$[1, 2, 3, 4, 5, 6] = 0,$$

während die nicht verschwindenden Pfaff'schen Functionen der nächstniedrigeren Ordnung sind:

$[1, 2, 3, 4] = 1$, $[1, 2, 3, 6] = -1$, $[1, 2, 4, 5] = 1$, $[1, 2, 5, 6] = 1$
$[1, 3, 4, 6] = -1$, $[1, 4, 5, 6] = -1$, $[2, 3, 4, 5] = 1$, $[2, 3, 5, 6] = 1$
$[3, 4, 5, 6] = 1$.

Daher findet der Satz des § 62 Anwendung. Wir finden leicht

$$W_1 = W_3 = W_5 = x_1 + x_3 + x_5 = P$$

$$W_2 = W_4 = W_6 = x_2 + x_4 + x_6 = Q$$

und die Hülfsgleichungen sind:

$$\frac{dx_1}{P} = \frac{dx_3}{P} = \frac{dx_5}{P} = -\frac{dx_2}{Q} = -\frac{dx_4}{Q} = -\frac{dx_6}{Q} .$$

Fünf unabhängige Integrale dieser Gleichungen sind:

$$x_3 - x_1 = \text{const.} = x_3'$$

$$x_5 - x_1 = \text{const.} = x_5'$$

$$x_4 - x_2 = \text{const.} = x_4' - x_2'$$

$$x_6 - x_2 = \text{const.} = x_6' - x_2'$$

$$(x_1 + x_3 + x_5)(x_2 + x_4 + x_6) = \text{const.} = (x_3' + x_5')(x_2' + x_4' + x_6'),$$

wenn man die Natani'schen Variablen einführt. Diese Gleichungen bestimmen x_2', x_3', x_4', x_5', x_6' als Functionen der ursprünglichen Variablen.

Da $\frac{A'}{A} = 1$ ist, so haben wir:

$$x_2 \delta x_1 + x_3 \delta x_2 + x_4 \delta x_3 + x_5 \delta x_4 + x_6 \delta x_5 + x_1 \delta x_6$$
$$= x_3' \delta x_2' + x_4' \delta x_3' + x_5' \delta x_4' + x_6' \delta x_5'$$

gemäss der allgemeinen Theorie. Es kommen auf der rechten Seite nur vier Differentialelemente, aber fünf Variablen vor, eine Illustration zu § 92. Das erste Integral von $\Omega = 0$ wird daher genommen in der Form:

$$x_2' = \text{const.} = c_1$$

und die nunmehr zu integrirende Gleichung ist:

$$x_4' dx_3' + x_5' dx_4' + x_6' dx_5' = 0\,.$$

Obwohl es auf den ersten Blick leicht zu sehen ist, welches das Integralsystem dieser Gleichung ist, so ist die Anwendung der allgemeinen Regel doch von Interesse. Die Gleichungen (6) des § 89 — oder ihr Aequivalent, das Hülfssystem des § 62 — geben:

$$\frac{dt_1'}{t_1'} = \frac{dx_3'}{x_5'} = \frac{dx_4'}{-x_4'} = \frac{dx_5'}{0} = \frac{dx_6'}{-x_4' - x_6'}\,.$$

Zunächst haben wir:

$$A_2 = t_1' = \frac{\text{const.}}{x_4'}$$

und daher, in Uebereinstimmung mit Natani's Methode:

$$\frac{A_2''}{A_2} = \frac{x_4'}{x_4''}\,.$$

Drei unabhängige t_1' nicht enthaltende Integrale des Hülfssystems sind:

$$x_5' = \text{const.} = x_5''$$

$$x_4' e^{\frac{x_3'}{x_5'}} = \text{const.} = x_4''$$

$$x_4' e^{-\frac{x_6'}{x_4'}} = \text{const.} = x_4'' e^{-\frac{x_6''}{x_4''}}\,,$$

wenn wir $x_3' = 0$ setzen und mit x_4'', x_5'', x_6'' die dadurch hervorgehenden Werthe der Variablen bezeichnen. Hieraus:

$$\frac{A_2''}{A_2} = \frac{x_4'}{x_4''} = e^{-\frac{x_3'}{x_5'}} = e^{-\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_1}}\,.$$

Somit:

$$x_4' \delta x_3' + x_5' \delta_4' + x_6' \delta x_5' = e^{-\frac{x_3 - x_1}{x_5 - x_1}} (x_5'' \delta x_4'' + x_6'' \delta x_5'')$$

und daher:

$$x_2\delta x_1 + x_3\delta x_2 + x_4\delta x_3 + x_5\delta x_4 + x_6\delta x_5 + x_1\delta x_6$$
$$= x_3'\delta x_2' + e^{-\frac{x_3-x_1}{x_5-x_1}}(x_5''\delta x_4'' + x_6''\delta x_5''),$$

welches offenbar die schliessliche Reduction von Ω ist. Das zweite Integral von $\Omega = 0$ ist augenscheinlich:

$$x_4'' = \text{const.} = c_2$$

und die alsdann zu integrirende Gleichung ist:

$$x_6''dx_5'' = 0,$$

deren Integral ist:

$$x_5'' = \text{const.} = c_3.$$

Die drei Integrale der ursprünglichen Gleichung sind daher:

$$x_2' = c_1, \quad x_4'' = c_2, \quad x_5'' = c_3$$

oder wie man leicht durch Auflösung der diese Variablen bestimmenden Gleichungen findet:

$$x_2' = \frac{x_2x_3 + x_1x_4 + x_2x_5 + x_1x_6 - x_1x_2}{x_3 + x_5 - 2x_1} = c_1$$

$$x_4'' = \frac{x_1x_2 + x_1x_6 + x_4x_3 + x_4x_5 - x_1x_4}{x_3 + x_5 - 2x_1}\, e^{\frac{x_3-x_1}{x_5-x_1}} = c_2$$

$$x_5'' = x_5 - x_1 = c_3$$

und die Coefficienten, welche in dem transformirten Werthe von Ω auftreten, sind:

$$x_3' = x_3 - x_1$$

$$\frac{x_6''}{x_4''} = \frac{x_6(x_3 + x_5) + x_1(x_4 + x_2) - x_1x_6}{x_1(x_2 + x_6) + x_4(x_3 + x_5) - x_1x_4} + \frac{x_3 - x_1}{x_5 - x_1}.$$

Aufgabe. Man integrire die Gleichung:

$$(x_2 + x_3)dx_1 + (x_3 + x_4)dx_2 + (x_4 + x_5)dx_3 + (x_5 + x_6)dx_4$$
$$+ (x_6 + x_1)dx_5 + (x_1 + x_2)dx_6 = 0.$$

§ 93.

Wir gehen nun zu dem Falle über, wo die Anzahl der Variablen in Gleichung (I) ursprünglich ungerade ist. Zufolge (2) in § 87 ist:

$$(2) \qquad \Omega = \sum_{m=1}^{2n+1} X_m\delta x_m = \lambda\,\delta\varphi + \sum_{s=1}^{n} U_s\delta u_s.$$

Eins der Integrale von $\Omega = 0$ ist $\varphi = a$. Eliminirt man mittels der Gleichungen

$$\varphi = a, \quad \delta\varphi = \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{\partial\varphi}{\partial x_m}\,\delta x_m$$

aus Ω die Grössen x_{2n+1} und δx_{2n+1}, so nimmt Ω die Form an

$$\Omega = \sum_{m=1}^{2n+1} X_m \delta x_m = \sum_{s=1}^{2n} V_s \delta x_s + \lambda\delta\varphi = \Theta + \lambda\delta\varphi,$$

wo

$$\lambda = X_{2n+1}\,\frac{1}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{2n+1}}}\,,$$

$$V_s = X_s - X_{2n+1}\,\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_s}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{2n+1}}}$$

ist. Der Ausdruck Θ enthält nur $2n$ Variable und daher hat die Gleichung $\Theta = 0$ zufolge der vorhergehenden Untersuchung (§§ 88—92) ein System von n Integralen. Werden die Hauptintegrale der Hülfsgleichungen eingeführt, so ist:

$$\Theta = \frac{A_1'}{A_1} V_2' \delta x_2' + \frac{A_1' A_2''}{A_1 A_2} V_4'' \delta x_4'' + \frac{A_1' A_2'' A_3'''}{A_1 A_2 A_3} V_6''' \delta x_6''' + \cdots,$$

wo x_2', x_4'', x_6''', ... Hauptintegrale zu (6) analoger Hülfssysteme sind. Das erste dieser Systeme würde erhalten werden, wenn man X in (6) durch V ersetzt und x_{2n+1} aus V mit Hülfe von $\varphi = a$ eliminirt; nach der Integration würde für a wieder φ zu setzen sein.

Wir können die Hülfsgleichungen aber auch direct in der Weise wie in § 89 herstellen. Nehmen wir an, dass in der Gleichung

$$\sum_{m=1}^{2n+1} X_m \delta x_m - \lambda\delta\varphi = \sum_{s=1}^{n} U_s \delta u_s$$

die unabhängige Variable nur als ein den Coefficienten der rechten Seite gemeinsamer Factor $\frac{1}{t_1}\left(= \frac{1}{A}\right)$ vorkommt, und setzen wir $\mu = A\lambda$, so ist bei der früheren Bezeichnung:

$$\sum_{m=1}^{2n+1} A X_m \delta x_m = \mu\delta\varphi + \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \delta u_s.$$

Die Veränderlichen in der neuen äquivalenten Form sind $\varphi, u_1, .., u_n, t_1, ..., t_n$, unter denen keine identische Functionalbeziehung existirt, und daher haben wir

$$\sum_{m=1}^{2n+1} A X_m \frac{\partial x_m}{\partial t_r} = 0$$

$$(\text{für } r = 1, 2, \ldots, n),$$

da die Variationen δt auf der rechten Seite nicht vorkommen.

Die letzte Gleichung ist eine Identität, wenn die passenden Werthe für x substituirt werden. Nehmen wir mit dem Resultat irgend eine willkürliche Variation vor, so haben wir für $r = 1$:

$$\delta \left\{ \sum_{m=1}^{2n+1} A X_m \frac{\partial x_m}{\partial t_1} \right\} = 0$$

oder:

$$A \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{\partial x_m}{\partial t_1} \delta X_m + A \sum_{m=1}^{2n+1} X_m \delta \frac{\partial x_m}{\partial t_1} + \delta A \sum_{m=1}^{2n+1} X_m \frac{\partial x_m}{\partial t_1} = 0,$$

so dass wir, da in dem letzten Gliede der Factor von δA verschwindet, die Gleichung erhalten:

$$A \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{\partial x_m}{\partial t_1} \delta X_m + A \sum_{m=1}^{2n+1} X_m \delta \frac{\partial x_m}{\partial t_1} = 0.$$

Es ist aber:

$$\sum_{m=1}^{2n+1} A X_m \delta x_m - \mu \delta \varphi = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \delta u_s$$

und daher die linke Seite explicit unabhängig von t_1 (gerade wie unter der Voraussetzung des § 89 bei den dort für die Coefficienten α_s genommenen Werthen), wenn die passenden Substitutionen für x gemacht werden. Daher:

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \left\{ \sum_{m=1}^{2n+1} A X_m \delta x_m - \mu \delta \varphi \right\} = 0$$

oder, da φ explicit unabhängig von t_1 ist:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t_1} \delta \varphi = \frac{\partial}{\partial t_1} \left\{ \sum_{m=1}^{2n+1} A X_m \delta x_m \right\}$$

$$= \frac{\partial A}{\partial t_1} \sum_{m=1}^{2n+1} X_m \delta x_m + A \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{\partial X_m}{\partial t_1} \delta x_m + A \sum_{m=1}^{2n+1} X_m \frac{\partial}{\partial t_1} (\delta x_m).$$

Nun ist δx_m eine beliebige Variation, daher

$$\frac{\partial}{\partial t_1} (\delta x_m) = \delta \frac{\partial x_m}{\partial t_1},$$

und demnach erhalten wir aus den beiden Gleichungen, welche diese beiden gleichen Grössen enthalten:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t_1}\delta\varphi = \frac{\partial A}{\partial t_1}\sum_{m=1}^{2n+1} X_m \delta x_m + A\sum_{m=1}^{2n+1}\left(\frac{\partial X_m}{\partial t_1}\delta x_m - \frac{\partial x_m}{\partial t_1}\delta X_m\right).$$

Es ist: $\frac{\partial A}{\partial t_1} = 1$, weil $A = t_1$ und

$$\frac{\partial X_m}{\partial t_1} = \sum_{s=1}^{2n+1}\frac{\partial X_m}{\partial x_s}\frac{\partial x_s}{\partial t_1}$$

$$\delta\varphi = \sum_{s=1}^{2n+1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_s}\delta x_s$$

$$\delta X_m = \sum_{s=1}^{2n+1}\frac{\partial X_m}{\partial x_s}\delta x_s.$$

Substituiren wir diese Werthe und beachten wir, dass die Variationen der Variablen willkürlich sind, so dass die Coefficienten einer und derselben Variation auf beiden Seiten der Gleichung gleich sind, so erhalten wir die $2n + 1$ Gleichungen:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_s} = X_s + A\sum_{m=1}^{2n+1} a_{s,m}\frac{\partial x_m}{\partial t_1}$$

und daher:

$$X_s = \frac{\partial \varphi}{\partial x_s}\frac{\partial \mu}{\partial t_1} + t_1\sum_{m=1}^{2n+1} a_{m,s}\frac{\partial x_m}{\partial t_1} \tag{8}$$

eine Gleichung, welche gilt für $s = 1, 2, \ldots, 2n + 1$, und da φ unabhängig ist von t_1, wenn die Substitutionen für x gemacht werden, so haben wir

$$\sum_{m=1}^{2n+1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_1} = 0. \tag{8a}$$

Diese $2n + 2$ Gleichungen werden, wie in dem früheren Falle, zunächst befriedigt durch

$$\varphi = a,\ u_1, \ldots, u_n,\ t_2,\ t_3, \ldots, t_n,$$

(welches $2n$ Integrale sind) und durch die sodann abgeleiteten Werthe von t_1 und μ. Wenn wir aus den $2n + 2$ Gleichungen t_1 und μ eliminiren, so erhalten wir $2n$ übrigbleibende Gleichungen mit $2n + 1$ Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ und diese haben das System von $2n$ Integralen $\varphi, u_1, \ldots, u_n, t_2, \ldots, t_n$.

§ 94.

Wir führen nun wie in § 91 die Hauptintegrale des Hülfssystems (8) ein. Das Integral $\varphi = a$ wird beibehalten. Wir nehmen $x_1 = 0$ und bezeichnen die übrigen Hauptintegrale mit $x_2', x_3', \ldots, x_{2n}'$, während der (übrigens nicht erforderliche) Werth von x_{2n+1}' dann durch die Gleichung gegeben wird:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}) = \varphi(0, x_2', \ldots, x_{2n+1}').$$

Werden diese Werthe substituirt, so ergiebt sich:

$$\sum_{m=1}^{2n+1} A X_m \delta x_m = A(\lambda \delta \varphi + \sum_{s=1}^{2n} V_s \delta x_s)$$

$$= \mu \delta \varphi + A' \sum_{s=2}^{2n} V_s' \delta x_s'.$$

Nehmen wir $\varphi = a$, $x_2' = c_1$ (so dass wir ausser einem willkürlichen Integral ein bestimmtes Integral haben), so ist die zu integrirende Gleichung

$$\sum_{s=3}^{2n} V_s' dx_s' = 0,$$

welche $2n - 2$ Variable enthält, oder wenn wir nur $x_2' = c_1$ als das einzige Integral nehmen, so entsteht die zu integrirende Gleichung aus dem Differentialausdruck

$$\mu \delta \varphi + A' \sum_{s=3}^{2n} V_s' \delta x_s',$$

welcher $2n - 1$ Veränderliche enthält. In jedem Falle kann die eine oder andere gerade passende Methode für respective eine gerade oder ungerade Anzahl von Variablen angewendet und so die Lösung schrittweise erhalten werden; die erstere der beiden Methoden wird jedoch im Allgemeinen die leichtere sein.

§ 95.

Die Hülfsgleichungen (8) treten offenbar in einer Form auf, die verschieden ist von derjenigen, welche die Hülfsgleichungen in dem entsprechenden Falle der Pfaff'schen Reduction charakterisirte, aber die Coefficienten der Grössen $\frac{\partial x}{\partial t}$ auf der rechten Seite von (8) sind dieselben wie in den erwähnten Gleichungen bei jener Reduction.

Die Determinante dieser Coefficienten in den $2n+1$ Gleichungen (8) verschwindet, da sie eine schiefe Determinante ungerader Ordnung ist; die frühere Untersuchung (§ 65) zeigt indessen, dass, wenn die Gleichungen mit den Pfaff'schen Functionen

$$[2, 3, \ldots, 2n+1], [3, 4, \ldots, 2n+1, 1], [4, 5, \ldots, 2n+1, 1, 2], \ldots$$

der Reihe nach multiplicirt und dann addirt werden, die die Grössen $\frac{\partial x}{\partial t}$ enthaltenden Glieder sämmtlich verschwinden. Hiernach erhalten wir:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t_1} = \frac{\sum_{s=1}^{2n+1} X_s [s+1, s+2, \ldots, s-2, s-1]}{\sum_{s=1}^{2n+1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_s}[s+1, s+2, \ldots, s-2, s-1]}, \tag{9}$$

so dass, wenn t_1 bekannt ist, die Integration dieser Gleichung sogleich den Werth von μ giebt.

Wir können nun irgend $2n$ der Gleichungen (8) zusammen mit (8^a) zur Bestimmung der Grössen $t_1 \frac{\partial x}{\partial t_1}$ benutzen. Behalten wir die $2n$ ersten derselben bei und setzen wir

$$\Theta_s = X_s - \frac{\partial \mu}{\partial t_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_s}, \tag{10}$$

wo $\frac{\partial \mu}{\partial t_1}$ den in (9) gegebenen Werth besitzt, so werden die Gleichungen:

$$\Theta_s + t_1 a_{s, 2n+1} \frac{\partial x_{2n+1}}{\partial t_1} = t_1 \sum_{m=1}^{2n} a_{m,s} \frac{\partial x_m}{\partial t_1}$$
$$(s = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Wenden wir nun die Lösung an, wie sie in § 59 gegeben ist, so wird:

$$(-1)^{m-1}[1, 2, 3, \ldots, 2n]\, t_1 \frac{\partial x_m}{\partial t_1} = W_m + t_1 \frac{\partial x_{2n+1}}{\partial t_1} \Delta_m,$$

wo

$$W_m = \sum_{s=1}^{2n} \Theta_s [s+1, s+2, \ldots, s-1]$$

ist. Hierbei sind in jedem Gliede unter dem Summationszeichen auf der rechten Seite die ganzen Zahlen $s, s+1, \ldots, s-1$ die Zahlen $1, 2, \ldots, m-1, m+1, \ldots, 2n$ in ihrer cyklischen Reihenfolge genommen und

$$\Delta_m = \sum_{s=1}^{2n} a_{s,2n+1} [s+1, s+2, \ldots, s-1]$$
$$= [1, 2, 3, \ldots, 2n+1],$$

wo m in der Reihe $1, 2, \ldots, 2n+1$ nicht vorkommt. Wir haben aber auch nach (8^a):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2n+1}} \frac{\partial x_{2n+1}}{\partial t_1} = 0,$$

woraus, wenn man mit $[1, 2, 3, \ldots, 2n] t_1$ multiplicirt, sich ergiebt:

$$t_1 \frac{\partial x_{2n+1}}{\partial t_1} \sum_{m=1}^{2n+1} \left\{ (-1)^{m-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \Delta_m \right\} = \sum_{m=1}^{2n} (-1)^m \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} W_m.$$

Nehmen wir zunächst den Theil auf der rechten Seite, so besitzen die $\frac{\partial \mu}{\partial t_1}$ enthaltenden Glieder, welche in Θ_s vorkommen, wenn wir für W_m seinen Werth substituiren, zum Coefficienten von $\frac{\partial \mu}{\partial t_1}$ die Grösse:

$$\sum_{m=1}^{2n} (-1)^{m-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \sum_{s=1}^{2n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} [s+1, s+2, \ldots, s-1],$$

wo die Zahlen $s+1, s+2, \ldots, s-1$ die Zahlen $1, 2, \ldots, 2n$ mit Weglassung von s und m sind, welche Zahlen s und m nothwendig verschieden sind. In dieser Doppelsumme ist der Coefficient von $\frac{\partial x}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$:

$$(-1)^{i-1} [j+1, j+2, \ldots, j-1] + (-1)^{j-1} [i+1, i+2, \ldots, i-1]$$
$$= \{(-1)^{i-1} + (-1)^{j-1+j-i-1}\} [j+1, j+2, \ldots, j-1]$$
$$= 0.$$

Daher ist die rechte Seite der Gleichung, welche $\frac{\partial x_{2n+1}}{\partial t_1}$ giebt:

$$\sum_{m=1}^{2n} (-1)^m \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \sum_{s=1}^{2n} X_s [s+1, s+2, \ldots, s-1]$$
$$= \sum_{m=1}^{2n} \sum_{s=1}^{2n} (-1)^m \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} X_s [s+1, s+2, \ldots, s-1],$$

wo in dem Symbol der Pfaff'schen Function $s+1, s+2, \ldots, s-1$ die ganzen Zahlen $1, 2, \ldots, 2n$ mit Weglassung von m in cyklischer Reihenfolge genommen sind. Und der Coefficient von $t_1 \frac{\partial x_{2n+1}}{\partial t_1}$ ist:

$$\sum_{m=1}^{2n+1}(-1)^{m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_m}\Delta_m$$
$$=\sum_{m=1}^{2n+1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_m}[m+1,\,m+2,\,\ldots,\,m-1],$$

wo die Zahlen $m,\, m+1,\, m+2, \ldots$ die in cyklischer Reihenfolge genommenen Zahlen $1, 2, \ldots, 2n+1$ sind. Da dieser Coefficient in Bezug auf sämmtliche Variablen symmetrisch ist, so können wir zweckmässig für denselben ein Symbol einführen. Wir setzen:

$$(11)\qquad \nabla=\sum_{m=1}^{2n+1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_m}[m+1,\,m+2,\,\ldots,\,m-1],$$

wobei bemerkt werden möge, dass ∇ der Nenner von $\frac{\partial\mu}{\partial t_1}$ in (9) ist. Alsdann ist:

$$(12')\quad \nabla t_1\frac{\partial x_{2n+1}}{\partial t_1}=\sum_{m=1}^{2n}\sum_{s=1}^{2n}(-1)^m\frac{\partial\varphi}{\partial x_m}X_s[s+1,s+2,\ldots,s-1].$$

§ 96.

Dieser Werth kann in die Gleichungen, welche $\frac{\partial x_m}{\partial t_1}$ durch $\frac{\partial x_{2n+1}}{\partial t_1}$ ausdrücken, substituirt werden, um die Grössen $\frac{\partial x_m}{\partial t_1}$ zu erhalten; oder die Gleichungen können gelöst werden, indem man $\frac{\partial x_m}{\partial t_1}$ an Stelle von $\frac{\partial x_{2n+1}}{\partial t_1}$ als die anfänglich unbestimmte Grösse nimmt. In jedem Falle kann das Resultat, welches die Werthe aller dieser Coefficienten in sich enthält, dargestellt werden in der Form

$$(12)\ (-1)^{p-1}\nabla t_1\frac{\partial x_p}{\partial t_1}=\sum_{m=1}^{2n+1}\sum_{s=1}^{2n+1}(-1)^{m'}\frac{\partial\varphi}{\partial x_m}X_s[s+1,s+2,\ldots,s-1],$$

wo $s+1,\, s+2, \ldots, s-1$ die Zahlen $1, 2, \ldots, 2n+1$ in cyklischer Ordnung genommen mit Weglassung von s, m, p und mit $s+1$ beginnend sind; die Zahlen s, m, p müssen verschieden von einander sein, so dass die Werthe $m=p$, $s=p$ auf der rechten Seite nicht vorkommen und das $s=m$ entsprechende Glied nicht auftritt, und der Wert von m' ist m, wenn $m<p$, dagegen $m-1$, wenn $m>p$ ist.

Insbesondere haben wir, wenn drei Variable vorhanden (also $n=1$) sind:

$$\nabla = [2, 3] \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + [3, 1] \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + [1, 2] \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$$

$$\nabla \frac{\partial \mu}{\partial t_1} = [2, 3] X_1 + [3, 1] X_2 + [1, 2] X_3$$

$$\nabla t_1 \frac{\partial x_1}{\partial t_1} = X_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - X_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$$

$$\nabla t_1 \frac{\partial x_2}{\partial t_1} = X_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - X_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$$

$$\nabla t_1 \frac{\partial x_3}{\partial t_1} = X_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - X_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$$

und für fünf Variable (also $n = 2$) haben wir:

$$\nabla = [2,3,4,5] \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + [3,4,5,1] \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + [4,5,1,2] \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + [5,1,2,3] \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} + [1,2,3,4] \frac{\partial \varphi}{\partial x_5}$$

$$\nabla \frac{\partial \mu}{\partial t_1} = [2,3,4,5] X_1 + [3,4,5,1] X_2 + [4,5,1,2] X_3 + [5,1,2,3] X_4 + [1,2,3,4] X_5$$

$$\nabla t_1 \frac{\partial x_1}{\partial t_1} = -\{3,4,5\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \{2,4,5\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \{2,3,5\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} + \{2,3,4\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_5}$$

$$-\nabla t_1 \frac{\partial x_2}{\partial t_1} = -\{3,4,5\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \{1,4,5\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \{1,3,5\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} + \{1,3,4\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_5}$$

$$\nabla t_1 \frac{\partial x_3}{\partial t_1} = -\{2,4,5\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \{1,4,5\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \{1,2,5\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} + \{1,2,4\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_5}$$

$$-\nabla t_1 \frac{\partial x_4}{\partial t_1} = -\{2,3,5\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \{1,3,5\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \{1,2,5\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \{1,2,3\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_5}$$

$$\nabla t_1 \frac{\partial x_5}{\partial t_1} = -\{2,3,4\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \{1,3,4\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \{1,2,4\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \{1,2,3\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_4},$$

worin das Symbol $\{\lambda, \mu, \nu\}$ definirt ist durch:

$$\{\lambda, \mu, \nu\} = \{\mu, \nu, \lambda\} = \{\nu, \lambda, \mu\} = X_\lambda [\mu, \nu] + X_\mu [\nu, \lambda] + X_\nu [\lambda, \mu].$$

§ 97.

Aus dem in Gleichung (9) gegebenen Werthe von $\frac{\partial \mu}{\partial t_1}$ erhalten wir eine unmittelbare Bestätigung des in § 65 gegebenen Jacobischen Resultats. Ist

$$\sum_{s=1}^{2n+1} X_s [s+1, s+2, \ldots, s-1] = 0,$$

so verschwindet $\frac{\partial \mu}{\partial t_1}$ und daher ist μ, dargestellt durch die neuen Variablen, explicit unabhängig von t_1, und in diesem Falle ist die zu integrirende Differentialgleichung nach der Transformation:

$$\mu d\varphi + \sum_{s=1}^{n} \alpha_s du_s = 0,$$

worin die Variablen $\varphi, u_1, \ldots, u_n, t_2, \ldots, t_n$ sind, deren Anzahl $2n$ beträgt. Eine solche Gleichung aber mit nur $2n$ Veränderlichen besitzt ein Integraläquivalent, welches aus n Gleichungen besteht — und im vorliegenden Falle nach nur einer einzigen (§ 92) Integration der Hülfsgleichungen erhalten wird, und hieraus folgern wir das bereits in § 66 erhaltene Resultat, dass nämlich die Gleichung

$$\sum_{m=1}^{2n+1} X_m dx_m = 0$$

durch n Integralgleichungen dargestellt werden kann, wenn die Bedingung

$$\sum_{s=1}^{2n+1} X_s[s+1, s+2, \ldots, s-1] = 0$$

identisch erfüllt ist.

§ 98.

Natani giebt die Lösungen der Gleichungen (12), welche eben abgeleitet wurden, nicht; aus ihrer gerade nicht einfachen Form geht augenscheinlich hervor, dass die Ableitung der Integrale und daraus der Hauptintegrale, auch für eine besondere bestimmte Function φ, ziemlich schwierig sein würde. In der Praxis würde die einfachste Methode wahrscheinlich die sein, dass man die Gleichung

$$\Omega = \sum_{m=1}^{2n+1} X_m dx_m = 0$$

mittels des willkürlich angenommenen Integrals $\varphi = a$ auf eine Gleichung $\Omega' = 0$ reducirt, die frei ist von x_{2n+1} und dx_{2n+1}, d. h. auf eine Gleichung, welche eine gerade Anzahl von Veränderlichen enthält, und auf diese reducirte Gleichung die zweckentsprechende frühere Methode, wie sie in § 59, 60 gegeben wurde, anwendet.

Nimmt man z. B. die sehr specielle Form:

$$\varphi = x_{2n+1},$$

so kann man das erste System (§ 59) der Hülfsgleichungen erhalten, denn $\frac{\partial \varphi}{\partial x_m}$ verschwindet für $m = 1, 2, \ldots, 2n$ und man erhält daher:

$$\nabla = [1, 2, \ldots, 2n],$$

welches die transformirte Function von (11) ist, und

$$(-1)^{p-1} \nabla t_1 \frac{\partial x_p}{\partial t_1} = \sum_{s=1}^{2n} X_s [s+1, s+2, \ldots, s-1],$$

wo $s+1, s+2, \ldots, s-1$ die in cyklischer Reihenfolge mit Auslassung von s und p genommenen Zahlen $1, 2, \ldots, 2n$ sind.

§ 99.

Bisher wurde angenommen (§ 89), dass unter den Coefficienten X in der Differentialgleichung keine Relationen bestehen, und es wurde die daraus sich ergebende kleinste Anzahl von Gleichungen in dem Integralsystem angegeben. Es kann indessen vorkommen, dass gewisse Relationen erfüllt sind, durch welche diese Anzahl auf eine geringere Zahl, als im Allgemeinen das Minimum ist, reducirt wird. Wir wollen nunmehr zur Betrachtung dieser Relationen übergehen.

§ 100.

Wir nehmen zuerst den Fall, wo die ursprüngliche Differentialgleichung eine **gerade** Anzahl von Veränderlichen enthält.

Die Anzahl der Hülfsgleichungen (6) beträgt, wenn die Variable t_1 eliminirt wird, $2n-1$; und im allgemeinen Falle sind ihre Integrale die Grössen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ und die Grössen $t_2, t_3, \ldots, t_n$ oder (welche Reihe mit dieser äquivalent ist) $\frac{U_2}{U_1}, \frac{U_3}{U_1}, \ldots, \frac{U_n}{U_1}$, im ganzen $2n-1$ Integrale d. i. gerade die erforderliche Anzahl. Wenn aber die ursprüngliche Differentialgleichung auf die Form

$$U_1 du_1 + U_2 du_2 + \cdots + U_q du_q = 0$$

reducirt werden kann, so giebt es nur $2q-1$ Integrale, nämlich $u_1, \ldots, u_q, \frac{U_2}{U_1}, \ldots, \frac{U_q}{U_1}$. Da die $2n-1$ Gleichungen nur $2q-1$ von einander unabhängige Integrale haben, so folgt, dass $2n-2q$ Gleichungen aus den übrigen $2q-1$ Gleichungen ableitbar sein müssen. Die Bedingungen für diese Ableitbarkeit, welches die Bedingungen dafür sind, dass in dem transformirten Ausdruck für Ω nur q Differentialelemente vorkommen, sind zugleich die Bedingungen dafür, dass $\Omega = 0$ durch $q (< n)$ Integrale befriedigt werden kann.

Da $2n-2q$ der $2n$ Gleichungen (§ 89)

$$X_s = t_1 \sum_{m=1}^{2n} a_{m,s} \frac{\partial x_m}{\partial t_1}$$

linear aus den übrigen ableitbar sind, so müssen, vorausgesetzt dass die ersten $2q$ der Gleichungen von einander unabhängig sind, Relationen bestehen von der Form:

$$X_r = \sum_{t=1}^{2q} c_{r,t} X_t$$

$$a_{p,r} = \sum_{t=1}^{2q} c_{r,t} a_{p,t},$$

wo r die Werthe $2q+1, 2q+2, \ldots, 2n$ und p die Werthe $1, 2, \ldots, 2n$ hat, und die Grössen $c_{r,t}$, welche die Natur unbestimmter Multiplicatoren haben, müssen eliminirt werden, ehe man die Bedingungen erhält.

Werden diese Grössen c eliminirt, so sind die entstehenden Gleichungen von zweierlei Art. Es giebt Gleichungen von der Form:

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} 0, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, & a_{1,2q}, & a_{1,r} \\ a_{2,1}, & 0, & a_{2,3}, & \ldots, & a_{2,2q}, & a_{2,r} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & 0, & \ldots, & a_{3,2q}, & a_{3,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2q,1}, & a_{2q,2}, & a_{2q,3}, & \ldots, & 0, & a_{2q,r} \\ X_1, & X_2, & X_3, & \ldots, & X_{2q}, & X_r \end{vmatrix} = 0,$$

wo r die Werthe $2q+1, 2q+2, \ldots, 2n$ hat, und es giebt Gleichungen von der Form:

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} 0, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, & a_{1,2q}, & a_{1,r} \\ a_{2,1}, & 0, & a_{2,3}, & \ldots, & a_{2,2q}, & a_{2,r} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & 0, & \ldots, & a_{3,2q}, & a_{3,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2q,1}, & a_{2q,2}, & a_{2q,3}, & \ldots, & 0, & a_{2q,r} \\ a_{s,1}, & a_{s,2}, & a_{s,3}, & \ldots, & a_{s,2q}, & a_{s,r} \end{vmatrix} = 0,$$

wo die möglichen Werthe von r: $2q+1, 2q+2, \ldots, 2n$ und die von s: $2q+1, 2q+2, \ldots, 2n$ sind.

Die Gleichungen der ersten Reihe (13) sind unabhängig von einander, sie liefern also $2n - 2q$ Bedingungen.

Die Gleichungen der zweiten Reihe (14) liefern Bedingungen, nur wenn r und s verschiedene ganze Zahlen sind, denn wenn $r = s$, so würde die resultirende Gleichung (da sie aus einer schiefen Deter-

minante ungerader Ordnung entsteht) verschwinden. Ferner wird durch $r = i$, $s = j$ und durch $r = j$, $s = i$ dieselbe Bedingung geliefert wegen der Relation:

$$a_{k,l} = - a_{l,k},$$

somit ist die Anzahl von Bedingungen gleich der Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung zu je zweien der $2n - 2q$ Elemente $2q + 1, 2q + 2, \ldots, 2n$, d. h. gleich

$$\frac{1}{2}(2n - 2q)(2n - 2q - 1).$$

Daher ist die Gesammtzahl der von einander unabhängigen Bedingungen, welche nothwendig sind dafür, dass die Gleichung

$$\sum_{m=1}^{2n} X_m dx_m = 0$$

durch $q (< n)$ Integralgleichungen befriedigt werden kann, gleich

$$2n - 2q + \frac{1}{2}(2n - 2q)(2n - 2q - 1) = (n - q)(2n - 2q + 1),$$

und die Bedingungen selbst werden dargestellt durch die Gleichungen (13) für die Werthe $r = 2q + 1, 2q + 2, \ldots, 2n$ sowie durch die Gleichungen (14) für alle möglichen Paare verschiedener ganzer Zahlen aus der Reihe $2q+1, 2q+2, \ldots, 2n$ für r und s.

Insbesondere ist, wenn $q = 1$, die Gleichung also exact ist, die Anzahl der von einander unabhängigen Bedingungen gleich $(n - 1)(2n - 1)$, was mit der früher (§ 6) erhaltenen Zahl übereinstimmt.

§ 101.

Wir nehmen nunmehr den Fall, dass die ursprüngliche Differentialgleichung eine **ungerade** Anzahl von Veränderlichen enthält.

Existirt das willkürliche Integral, so geht es offenbar vermöge (12) in die Hülfsgleichungen ein, und alsdann würde die einfachere Methode die sein, das willkürliche Integral zu benutzen, um irgend eine der Variablen und das Differentialelement dieser Variablen zu eliminiren und so die Gleichung auf eine andere zu reduciren, welche die nächstniedrigere gerade Anzahl von Veränderlichen enthält. Die Bedingungen dafür, dass die neue Gleichung durch eine Anzahl von

Integralgleichungen befriedigt werden kann, welche kleiner ist als die allgemeine Minimalzahl (was eintritt, wenn die alte Gleichung in dieser Weise befriedigt wird), können dann aus der vorhergehenden Untersuchung abgeleitet werden.

Wenn das willkürliche Integral nicht existirt*), dann nehmen die Hülfsgleichungen (8) die Form an:

$$X_s = t_1 \sum_{m=1}^{2n+1} a_{m,s} \frac{\partial x_m}{\partial t_1} \tag{8'}$$

und ihre Anzahl ist gleich $2n+1$. Wird t_1 eliminirt, so sind es $2n$ Gleichungen. Diese Zahl muss indessen um Eins erniedrigt werden wegen der Relation

$$\sum_{s=1}^{2n+1} X_s[s+1, s+2, \ldots, s-1] = 0, \tag{15}$$

welches die nothwendige Bedingung dafür ist, dass die modificirten Gleichungen (8′) zusammen bestehen können.

Nehmen wir dann an, dass die gegebene Differentialgleichung durch q Integralgleichungen befriedigt werden kann, so erhalten wir $2q - 1$ Integrale der vorstehenden Hülfsgleichungen in der Form $u_1, u_2, \ldots, u_q, \frac{U_2}{U_1}, \ldots, \frac{U_q}{U_1}$. Infolge des Erfülltseins der vorstehenden einzigen Bedingung kann nun die letzte der Gleichungen (8′) aus den $2n$ ersten von ihnen abgeleitet werden und kann dieselbe daher vorläufig aus der Betrachtung weggelassen werden. Die $2q$ ersten der Gleichungen (8′) genügen zur Bestimmung von t_1 und der verlangten $2q - 1$ Integrale, und daher müssen die übrigen $2n - 2q$ Gleichungen in (8′) aus den $2q$ ersten derselben ableitbar sein. Die Bedingungen dieser Ableitbarkeit sind die Bedingungen, dass die Differentialgleichung durch q Integrale befriedigt werden kann.

Die Schlussreihe ist derjenigen im vorigen Falle analog und das Resultat ist, dass es $2n - 2q$ Gleichungen giebt von der Form:

---

*) Natani giebt kein Mittel an zu bestimmen, ob ein willkürliches Integral existirt oder nicht. Spätere Untersuchungen (von Clebsch und besonders von Lie) machen diese Bestimmung unnöthig, was seinen Grund hat in den an der reducirten Form vorgenommenen Modificationen, durch welche sie die Normalform annimmt.

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} 0, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, & a_{1,2q}, & a_{1,r} \\ a_{2,1}, & 0, & a_{2,3}, & \ldots, & a_{2,2q}, & a_{2,r} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & 0, & \ldots, & a_{3,2q}, & a_{3,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2q,1}, & a_{2q,2}, & a_{2q,3}, & \ldots, & 0, & a_{2q,r} \\ X_1, & X_2, & X_3, & \ldots, & X_{2q}, & X_r \end{vmatrix} = 0,$$

für $r = 2q + 1,\ 2q + 2, \ldots, 2n$, und ferner Gleichungen von der Form:

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} 0, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots, & a_{1,2q}, & a_{1,r} \\ a_{2,1}, & 0, & a_{2,3}, & \ldots, & a_{2,2q}, & a_{2,r} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & 0, & \ldots, & a_{3,2q}, & a_{3,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2q,1}, & a_{2q,2}, & a_{2q,3}, & \ldots, & 0, & a_{2q,r} \\ a_{s,1}, & a_{s,2}, & a_{s,3}, & \ldots, & a_{s,2q}, & a_{s,r} \end{vmatrix} = 0$$

für die Werthe $2q + 1,\ 2q + 2, \ldots, 2n$ von r und die Werthe $2q + 1,\ 2q + 2, \ldots, 2n + 1$ von s. Die Zahl der Gleichungen in (17) ist:

$$2n - 2q \quad \text{für} \quad s = 2n + 1 \quad \text{und} \quad r = 2q + 1,\ 2q + 2, \ldots, 2n$$

vermehrt um

$$\frac{1}{2}(2n - 2q)(2n - 2q - 1)$$

für die verschiedenen Combinationen zu je zweien aus der Reihe $2q + 1,\ 2q + 2, \ldots, 2n$. Demnach ist also die Gesammtzahl dieser Gleichungen (17) gleich

$$\frac{1}{2}(2n - 2q)(2n - 2q + 1).$$

Hierzu tritt schliesslich noch die Bedingung (15).

Hieraus folgt, dass, wenn die einzige Bedingung (15), die $2n - 2q$ Bedingungen (16) und die $(n - q)(2n - 2q + 1)$ Bedingungen (17) d. i. insgesammt $(2n - 2q + 1)(n - q + 1)$ Bedingungen erfüllt sind, alsdann die Gleichung

$$\sum_{m=1}^{2n+1} X_m dx_m = 0$$

durch q bestimmte Integralgleichungen befriedigt werden kann.

Insbesondere ist, wenn $q = 1$, die Gleichung also exact ist, die

Anzahl der von einander unabhängigen Bedingungen gleich $n(2n-1)$, was mit der früher (§ 6) erhaltenen Zahl übereinstimmt.

§ 102.

Es ist nunmehr die Integration der Hülfsgleichungen in Betracht zu ziehen. Nehmen wir an, dass die ursprüngliche Differentialgleichung infolge des Erfülltseins der nothwendigen Bedingungen durch ein System von q Integralgleichungen befriedigt wird, so zeigen die vorhergehenden Untersuchungen, dass $2q-1$ (von t_1 unabhängige) Grössen bestimmt werden müssen und dass daher die Anzahl der von einander unabhängigen und von t_1 freien Hülfsgleichungen $2q-1$ ist. Diese Grössen enthalten sämmtliche Variablen der ursprünglichen Differentialgleichung; daher betrachten wir in den Hülfsgleichungen $2q-1$ der Variablen als abhängig und die übrigen — nämlich $2n-2q+1$ oder $2n-2q+2$, je nachdem die ursprüngliche Anzahl gerade oder ungerade ist — als unabhängig. Bezeichnet s diese letztere Zahl — also $2n-2q+1$ oder $2n-2q+2$ in den beiden Fällen — und werden die unabhängigen Variablen mit $x_1, x_2, \ldots, x_s$, die abhängigen Variablen aber mit $y_1, y_2, \ldots, y_{2q-1}$ bezeichnet, so sind die $2q-1$ Hülfsgleichungen, wenn t_1 eliminirt ist, von der Form:

$$\sum_{r=1}^{s} Z_{r,\mu}\, dx_r + \sum_{i=1}^{2q-1} T_{i,\mu}\, dy_i = 0$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, 2q-1),$$

und die Coefficienten Z und T sind von der Form:

$$X_{2q}\, a_{m,\mu} - X_\mu\, a_{m,2q}.$$

Dies ist ein System von $2q-1$ Differentialgleichungen mit mehr denn $2q$ Variablen und dasselbe wird befriedigt durch ein System von $2q-1$ Integralgleichungen. Demnach ist es ein System exacter Gleichungen und wir erhalten die Integrale durch eine der bereits im Kap. 2 angegebenen Methoden. Wenden wir insbesondere Natani's Methode (l. c. § 33) an und führen die Hauptintegrale ein, welche $y_1^{(s)}, y_2^{(s)}, \ldots, y_{2q-1}^{(s)}$ sein werden, wenn nach s Integrationen

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_s = 0,$$

wie in dieser Methode üblich, gesetzt wird, so können wir $y_i^{(s)} = x_{s+i}^{(s)}$ annehmen und dann ist die Differentialgleichung:

$$\sum_{m=1} X_m dx_m = \frac{A^{(s)}}{A} \sum_{i=1}^{2q-1} X^{(s)}_{s+i}\, dx^{(s)}_{s+i} = 0,$$

wo $X^{(s)}_{s+i}$ der Werth von X_{s+i} ist, wenn wir $x_j = 0$ nehmen für $j = 1, \ldots, s$ und $x_{s+i} = x^{(s)}_{s+i}$ für $i = 1, \ldots, 2q-1$.

Wir haben nun eine Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{2q-1} X^{(s)}_{s+i}\, dx^{(s)}_{s+i} = 0$$

mit $2q-1$ Variablen, welche durch q Integrale befriedigt wird; dieselbe ist daher von der im Vorhergehenden (§ 93) betrachteten normalen keiner Bedingung unterliegenden Form. Als erstes Integral können wir nehmen:

$$y^{(s)}_1 = x^{(s)}_{s+1} = \text{const.},$$

und dann hat die Gleichung

$$\sum_{i=2}^{2q-1} X^{(s)}_{s+i}\, dx^{(s)}_{s+i} = 0$$

zwischen $2q-2$ Variablen $q-1$ Integrale, welche zusammen mit dem einen bereits erhaltenen das System von q Integralgleichungen bilden. Oder wir können als erstes Integral nehmen:

$$\varphi\left(x^{(s)}_{s+1}, \ldots\right) = \text{const.},$$

und erhalten, indem wir mittels dieses Integrals die Grössen $x^{(s)}_{s+1}$ und $dx^{(s)}_{s+1}$ aus der Gleichung eliminiren, eine analoge Gleichung mit $2q-2$ Variablen, die in derselben Weise zu integriren ist, wie vorher.

Die zweite dieser Annahmen betrachtet die reducirte Gleichung als eine Gleichung zwischen einer ungeraden Anzahl von Variablen — und das angenommene Integral ist das gewöhnliche nothwendige Integral (§ 69) von willkürlicher Form, welches als das Integral der Gleichung genommen wird. Die erste jener Annahmen betrachtet die Gleichung als die erste reducirte Form einer $2q$ Variablen enthaltenden Gleichung und das angenommene Integral ist das gewöhnliche (l. c.) erste Integral einer solchen Gleichung. Die Beziehung zwischen den beiden Integralsystemen wird ersichtlich werden, wenn wir zur Betrachtung der Methode von Clebsch kommen.

Beispiel 1. Es sei die Gleichung zu integriren:

$$(x_2-x_3+x_4-x_5)dx_1+(x_3-x_4+x_5-x_1)dx_2+(x_4-x_5+x_1-x_2)dx_3$$
$$+(x_5-x_1+x_2-x_3)dx_4+(x_1-x_2+x_3-x_4)dx_5=0.$$

Für diese Gleichung haben wir:

$$a_{1,2} = a_{2,3} = a_{3,4} = a_{4,5} = a_{1,4} = a_{2,5} = a_{3,1} = a_{4,2} = a_{5,3} = a_{5,1} = 2,$$
$$[1,2,3,4] = [2,3,4,5] = [3,4,5,1] = [4,5,1,2] = [5,1,2,3] = 4.$$

Die Bedingung (15) ist erfüllt, für $q = 1$ aber ist keine der Bedingungen (16) oder (17) erfüllt und für $q = 2$ existiren die Bedingungen (17) gar nicht, während die einzige aus (16) übrigbleibende Bedingung identisch mit (15) ist. Daher kann die gegebene Differentialgleichung durch zwei Integrale befriedigt werden.

Die Hülfsgleichungen sind:

$$X_1 = \frac{2t_1}{dt_1}(-dx_2 + dx_3 - dx_4 + dx_5) = -2t_1 \frac{\partial X_1}{\partial t_1}$$
$$X_2 = -2t_1 \frac{\partial X_2}{\partial t_1}$$
$$X_3 = -2t_1 \frac{\partial X_3}{\partial t_1}$$
$$X_4 = -2t_1 \frac{\partial X_4}{\partial t_1}$$
$$X_5 = -2t_1 \frac{\partial X_5}{\partial t_1},$$

von denen nur vier unabhängig sind; dieselben können in der Form geschrieben werden:

$$\frac{dX_1}{X_1} = \frac{dX_2}{X_2} = \frac{dX_3}{X_3} = \frac{dX_4}{X_4}\left[= \frac{dX_5}{X_5} = \frac{dt_1}{-2t_1}\right].$$

Drei unabhängige Integrale dieser sind:

$$u = \frac{X_2}{X_1}, \quad v = \frac{X_3}{X_1}, \quad w = \frac{X_4}{X_1},$$

woraus sich ergiebt:

$$x_2 = X_1(1 + u) + x_1$$
$$x_3 = X_1(1 + 2u + v) + x_1$$
$$x_4 = X_1(1 + 2u + 2v + w) + x_1$$
$$x_5 = X_1(u + v + w) + x_1.$$

Werden diese Werthe in den Ausdruck

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 + X_5 dx_5$$

substituirt, so nimmt derselbe die Form an:

$$X_1^2\{(v + w - 1)du + (w - u - 1)dv - (u + v + 1)dw\},$$

was eine indirecte Bestätigung dafür giebt, dass X_1^{-2} der durch Integration der Hülfsgleichung abgeleitete Werth von t_1 ist, denn $t_1 \Omega$

ist in der neuen Form unabhängig von t_1. Demnach ist die zu integrirende Gleichung:

$$(v + w - 1)\,du + (w - u - 1)\,dv - (u + v + 1)\,dw = 0,$$

und, wie zu erwarten war, befriedigt dieselbe die Integrabilitätsbedingung nicht. Ihre beiden Integrale können in der Form genommen werden:

$$v = \text{const.}$$

$$\frac{u + v + 1}{v + w - 1} = \text{const.},$$

oder zwei Integrale, durch welche die ursprüngliche Differentialgleichung befriedigt wird, sind:

$$\frac{x_1 - x_2 + x_4 - x_5}{x_2 - x_3 + x_4 - x_5} = \text{const.}$$

$$\frac{x_4 - x_5}{x_5 - x_2} = \text{const.}$$

Beispiel 2. Als Anmerkung zu dem Vorhergehenden können wir die Bemerkung hinzufügen, dass, wenn die Bedingung (15) und keine andere Bedingung weiter für eine Gleichung zwischen einer ungeraden Anzahl von Variablen befriedigt ist (§ 65), alsdann häufig ohne Rücksicht auf die Existenz des willkürlichen Integrals in § 100 eine Reduction auf die nächstniedrigere Anzahl von Variablen ausgeführt werden kann, indem man aus den Hülfsgleichungen die Variation irgend einer Variablen fortlässt.

Nehmen wir z. B. an, dass sich x_5 in den Hülfsgleichungen nicht ändert (oder, was dasselbe ist, wenn wir passende Variable für die Transformation von $\sum_{r=1}^{4} X_r dx_r$ finden können), so sind diese Hülfsgleichungen:

$$\frac{dx_1}{x_1 - x_5} = \frac{dx_2}{x_2 - x_5} = \frac{dx_3}{x_3 - x_5} = \frac{dx_4}{x_4 - x_5}.$$

Hieraus ergeben sich als passende Variable für die Transformation:

$$u' = \frac{x_2 - x_5}{x_1 - x_5}, \quad v' = \frac{x_3 - x_5}{x_1 - x_5}, \quad w' = \frac{x_4 - x_5}{x_1 - x_5}.$$

Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda + x_5 \\ x_2 &= \lambda u' + x_5 \\ x_3 &= \lambda v' + x_5 \\ x_4 &= \lambda w' + x_5, \end{aligned}$$

und wenn diese Werthe substituirt werden, finden wir:

$$\sum_{r=1}^{5} X_r dx_r = \lambda^3 \{ v' - w' - 1) du' + (w' - u' + 1) dv' + (u' - v' - 1) dw' \} = 0,$$

so dass die zu integrirende Gleichung ist:

$$(v' - w' - 1) du' + (w' - u' + 1) dv' + (u' - v' - 1) dw' = 0.$$

Die Integrale dieser Gleichung sind:

$$\frac{1 - u' + w'}{u' - v' + w'} = \text{const.}$$

$$\frac{w'}{u'} = \text{const.}$$

Die allgemeine Rechtfertigung der Methode ist im § 66 gegeben.

§ 103.

Die Kenntniss eines der Integrale der Hülfsgleichungen (und daher, wofern dieses Integral das erste ist, eines Integrales der gegebenen Differentialgleichung, vorausgesetzt, dass diese eine Gleichung mit einer geraden Anzahl Variablen ist) kann in folgender Weise verwerthet werden*), um die Anzahl der Gleichungen in dem Hülfssystem zu vermindern.

Es sei u_1 das bereits bekannte und $u_2, \ldots, u_n$ die noch zu findenden Integrale. Dann haben wir:

$$\sum_{m=1}^{2n} X_m \delta x_m = \frac{1}{A} \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \delta u_s,$$

wo $A (= t_1)$ die Variable ist, welche nur als gemeinsamer Factor in den Coefficienten der rechten Seite auftritt; die Grössen α sind unabhängig von t_1 und wir belassen sie in ihrer allgemeinen Form, nehmen also nicht die besonderen Formen von § 89. Aus dieser Gleichung folgt:

$$(a) \qquad \sum_{m=1}^{2n} A X_m \delta x_m - \alpha_1 \delta u_1 = \alpha_2 \delta u_2 + \cdots + \alpha_n \delta u_n.$$

Wendet man auf diese Gleichung dasselbe Verfahren wie in § 93

*) Natani's Untersuchung wurde vor der Jacobi'schen Abhandlung in Crelle's J. Bd. 60 veröffentlicht, sonst könnten die folgenden Resultate durch die Resultate dieser Abhandlung ersetzt werden. Natani's hier gegebenes Resultat stimmt, wenn auch nicht in seinem expliciten Ausdruck, mit den von Clebsch erhaltenen Resultaten (§ 121 und 122) überein.

an und beachtet man, dass α_1 und t_1 von einander unabhängig sind, so dass es zwei unabhängige Veränderliche giebt, so gelangt man zu den $2n$ Gleichungen

$$X_s \delta t_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_s} \delta \alpha_1 + t_1 \sum_{m=1}^{2n} a_{m,s} \delta x_m \tag{18}$$

für $s = 1, \ldots, 2n$.

Nun sind zwei dieser Gleichungen erforderlich, um die neuen unabhängigen Variablen t_1 und α_1 als Functionen der alten Variablen x zu bestimmen, und es bleiben daher $2n - 2$ Gleichungen übrig zur Bestimmung der übrigen Grössen. Für die Gleichung (a) sind aber aus den Gleichungen (18) nur $2n - 3$ Grössen zu bestimmen, nämlich $u_2, \ldots, u_n, \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha_2}$. Da somit die $2n - 2$ Gleichungen, welche aus (18) übrig bleiben, nur $2n - 3$ Integrale (nämlich die eben genannten Grössen) haben, so muss eine dieser Gleichungen eine blosse lineare Combination der andern $2n - 3$ sein.

Jede dieser Gleichungen enthält die Variationen zweier unabhängigen Variablen und führt daher zu zwei Gleichungen von den Formen:

$$X_s = t_1 \sum_{m=1}^{2n} a_{m,s} \frac{\partial x_m}{\partial t_1} \tag{I}$$

$$0 = \frac{\partial u_1}{\partial x_s} + t_1 \sum_{m=1}^{2n} a_{m,s} \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_1}, \tag{II}$$

so dass wir zwei Systeme von je $2n - 3$ unabhängigen Gleichungen erhalten. Die Grössen t_1 und α_1 sind durch Quadraturen bestimmbar und u_1 ist gegeben, so dass von den Variablen t_1 und den $2n$ Variablen x drei als beseitigt betrachtet werden können, und die $2n - 3$ Gleichungen in jedem System enthalten $2n - 2$ Variable.

Sind nun keine Integrale bekannt, so ist (I) das Hülfssystem und dasselbe hat $2n - 1$ Integrale, welche sämmtlich von t_1 unabhängig sind. Von diesen $2n - 1$ Integralen ist eins nothwendig u_1, andere $2n - 3$ sind die den beiden Systemen (I) und (II) gemeinsamen Integrale und das fehlende Integral ist offenbar α_1.

Nehmen wir die Lösungen der Gleichungen (I) in der Form:

$$t_1 \frac{\partial x_m}{\partial t_1} = \sum_{s=1}^{2n} X_s R_{m,s},$$

dann sind die Lösungen der Gleichungen (II):

$$t_1 \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_1} = -\sum_{s=1}^{2n} \frac{\partial u_1}{\partial x_s} R_{m,s}.$$

Hiernach erhalten wir, wenn ϑ irgend eine Function der Variablen x ist und dieselbe ausgedrückt wird durch die neuen Veränderlichen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial t_1} &= \sum_{m=1}^{2n} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_1} \\ &= \frac{1}{t_1} \sum_{m=1}^{2n} \sum_{s=1}^{2n} X_s R_{m,s} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_m}, \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha_1} &= \sum_{m=1}^{2n} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_1} \\ &= -\frac{1}{t_1} \sum_{m=1}^{2n} \sum_{s=1}^{2n} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_m} \frac{\partial u_1}{\partial x_s} R_{m,s}. \end{aligned}$$

Es ergiebt sich nun sofort, dass, wenn ϑ ein Integral der Pfaff-schen Differentialgleichung ist, z. B. u_2 neben u_1, so dass es in den neuen Variablen ausgedrückt unabhängig von t_1 und α_1 ist, dasselbe alsdann den beiden Gleichungen

$$\sum_{m=1}^{2n} \sum_{s=1}^{2n} X_s R_{m,s} \frac{\partial u_2}{\partial x_m} = 0$$

$$\sum_{m=1}^{2n} \sum_{s=1}^{2n} \frac{\partial u_1}{\partial x_s} R_{m,s} \frac{\partial u_2}{\partial x_m} = 0$$

genügt, welche mit den später bei der Darlegung der Clebsch'schen Theorie gegebenen übereinstimmen.

§ 104.

Nachdem wir nun wissen, welche Folgen die Kenntniss eines der Integrale der Hülfsgleichungen (6) des § 89 oder der oben angegebenen Gleichungen (I) hat, eines Integrals, welches der Natur der Sache nach auch ein Integral der Differentialgleichung ist, wollen wir nunmehr überlegen, welche Folgen die Kenntniss zweier Integrale der Hülfsgleichungen (6) oder (I) hat.

Eins der beiden bekannten Integrale ist ein Integral der Dif-

ferentialgleichung und kann mit u_1 bezeichnet werden; das andere werde mit ϑ bezeichnet. Alsdann ist, da beide Integrale von (I) sind:

$$\sum_{m=1}^{2n} \sum_{s=1}^{2n} X_s R_{m,s} \frac{\partial u_1}{\partial x_m} = 0$$

$$\sum_{m=1}^{2n} \sum_{s=1}^{2n} X_s R_{m,s} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_m} = 0.$$

Nun kann ϑ ein Integral der Differentialgleichung sein oder nicht. Nach dem letzten Paragraphen ist:

$$-t_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha_1} = \sum_{m=1}^{2n} \sum_{s=1}^{2n} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_m} \frac{\partial u_1}{\partial x_s} R_{m,s},$$

und da ϑ ein Integral des Systems (I) ist, so ist es eine Function von u_1, von α_1 und den $2n-3$ den Systemen (I) und (II) gemeinschaftlichen Lösungen oder etwa von α_1 und diesen $2n-3$ Lösungen allein, denn überall, wo u_1 vorkommt, kann es durch eine Constante ersetzt werden. Wie beschaffen also auch die Form von ϑ sein möge, wir erhalten $\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha_1}$ als Function von diesen selben $2n-3$ Lösungen und von α_1, so dass $\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha_1}$ eine Lösung des Systems (I) oder der äquivalenten partiellen Differentialgleichung

$$\sum_{m=1}^{2n} \sum_{s=1}^{2n} X_s R_{m,s} \frac{\partial u}{\partial x_m} = 0$$

ist.

In Bezug auf den obigen Werth von $\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha_1}$ können nun vier Fälle eintreten.

Erster Fall: $\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha_1}$ kann verschwinden. Dies ist nach dem vorigen Paragraphen die Bedingung dafür, dass ϑ die Gleichungen befriedigt, welche ein zweites Integral der Pfaff'schen Gleichung bestimmen. Somit ist in diesem Falle ϑ ein zweites Integral, etwa u_2.

Zweiter Fall: $\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha_1}$ kann eine reine Constante sein, etwa gleich $\frac{1}{c}$. Dann ist $\alpha_1 = c\vartheta$. Demnach ist in diesem Falle das zweite Integral des Hülfssystems ein blosses constantes Vielfaches des Coefficienten des Differentialelements du_1 des ersten Integrals bei der Bildung des reducirten Pfaff-

schen Ausdrucks. Es ist dies etwas vortheilhafter, als wenn α_1 durch eine Quadratur bestimmen müsste.

Dritter Fall: $\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha_1}$ kann eine Function von ϑ sein, etwa $f(\vartheta)$. Dann haben wir:

$$d\alpha_1 = \frac{d\vartheta}{f(\vartheta)}$$

oder

$$\alpha_1 = \int \frac{d\vartheta}{f(\vartheta)},$$

so dass α_1 durch eine Quadratur bestimmt ist. Wofern nicht etwa diese Quadratur leichter ist als die, durch welche α_1 bestimmt wurde, lässt sich im gegenwärtigen Falle aus der Kenntniss des zweiten Integrals des Hülfssystems kein Vortheil weiter ziehen.

Vierter Fall: $\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha_1}$ kann eine nicht verschwindende Function der Variabeln sein, welche sich nicht durch ϑ ausdrücken lässt; dieselbe werde mit v bezeichnet, dann ist v eine neue Lösung des Hülfssystems (I) und bietet somit dieselben Fälle dar wie ϑ, d. h. es kann v ein zweites Integral der ursprünglichen Pfaff-schen Differentialgleichung sein, oder es wird, wenn $\frac{\partial v}{\partial \alpha_1}$ entweder eine Constante oder eine Function von ϑ und v ist, eine sehr einfache Quadratur im Falle eines constanten oder eine verhältnissmässig einfache Quadratur im Falle eines functionalen Werthes die Grösse α_1 bestimmen; oder es kann schliesslich $\frac{\partial v}{\partial \alpha_1}$ noch von allem diesem verschieden und daher, wie bei $\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha_1}$, wieder eine neue Lösung des Hülfssystems (1) sein.

Da dieses Hülfssystem nur eine endliche Anzahl von Lösungen hat, so wird die durch den vierten Fall dargebotene Reihe von Möglichkeiten schliesslich ein Ende nehmen, so dass wir schliesslich entweder ein zweites Integral der Pfaff'schen Gleichung erhalten oder α_1 durch Quadraturen finden.

§ 105.

Gerade so wie wir im § 103 untersuchten, welche Modification des Hülfssystems infolge der Kenntniss eines Integrals der Differentialgleichung ermöglicht wird, so können wir hier analog untersuchen,

welche Modificationen durch die Kenntniss zweier Integrale der Differentialgleichung möglich werden.

Sind u_1 und u_2 die beiden als bekannt vorausgesetzten Integrale, so sind die (18) entsprechenden Gleichungen:

$$X_s \delta t_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_s} \delta \alpha_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_s} \delta \alpha_2 + t_1 \sum_{m=1}^{2n} a_{m,s} \delta x_m.$$

Es sind drei unabhängige Variablen t_1, α_1, α_2 vorhanden, welche zu ihrer Bestimmung durch Quadraturen drei von diesen $2n$ Gleichungen erfordern. Von den übrigbleibenden $2n - 3$ Gleichungen sind nur $2n - 5$ unabhängig, welche die Grössen $u_3, \ldots, u_n, \frac{\alpha_4}{\alpha_3}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha_3}$ bestimmen, und da drei unabhängige Variable vorhanden sind, so führt jede der Gleichungen zu drei Gleichungen von der Form:

$$\text{(I)} \qquad X_s = t_1 \sum_{m=1}^{2n} a_{m,s} \frac{\partial x_m}{\partial t_1}$$

$$\text{(II)} \qquad 0 = \frac{\partial u_1}{\partial x_s} + t_1 \sum_{m=1}^{2n} a_{m,s} \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_1}$$

$$\text{(III)} \qquad 0 = \frac{\partial u_2}{\partial x_s} + t_1 \sum_{m=1}^{2n} a_{m,s} \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_2}.$$

Hiernach giebt es drei Systeme von Hülfsgleichungen, von denen jedes $2n - 5$ unabhängige Glieder enthält; und da u_1 und u_2 constant und t_1, α_1, α_2 als Functionen der Variablen x bestimmt sind, so folgt, dass die Gleichungen zwischen $2n - 4$ $(= 2n + 1 - 5)$ Variablen bestehen, die verschieden sind von denjenigen drei unabhängigen Variablen, welche nicht in den Ausdruck ihrer Integrale eingehen.

Die Bedingung am Ende von § 103, dass u_2 unabhängig von α_1 ist, nämlich

$$0 = \sum_{m=1}^{2n} \sum_{s=1}^{2n} \frac{\partial u_1}{\partial x_s} R_{m,s} \frac{\partial u_2}{\partial x_m}$$

ist, wie leicht zu beweisen, auch die Bedingung dafür, dass u_1 unabhängig von α_2 ist. Und wie dort bestätigt man leicht, dass ein drittes Integral der ursprünglichen Differentialgleichung den Bedingungen

$$\sum_{m=1}^{2n} \sum_{s=1}^{2n} X_s R_{m,s} \frac{\partial u_3}{\partial x_m} = 0$$

$$\sum_{m=1}^{2n} \sum_{s=1}^{2n} \frac{\partial u_1}{\partial x_s} R_{m,s} \frac{\partial u_3}{\partial x_m} = 0$$

$$\sum_{m=2}^{2n} \sum_{s=1}^{2n} \frac{\partial u_2}{\partial x_s} R_{m,s} \frac{\partial u_3}{\partial x_m} = 0$$

genügt, welche mit den von der Clebsch'schen Theorie (§ 122) gegebenen übereinstimmen.

Und so geht es weiter fort, indem man entweder irgend welche Anzahl von unabhängigen Integralen des ursprünglichen Hülfssystems oder irgend welche Anzahl von Integralen der gegebenen Differentialgleichung als bekannt voraussetzt.

7. Kapitel.

Anwendung auf partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

§ 106.

Da Pfaff's Untersuchungen ursprünglich in der Absicht unternommen wurden, zu einer Auflösung der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu gelangen, so dürfte es von einigem Interesse sein, kurz die Form anzudeuten, welche die Auflösung annimmt, wenn man sie aus der Theorie der Pfaff'schen Gleichungen ableitet.

Es sei

$$(1) \qquad f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a$$

irgend eine Differentialgleichung, deren Integral gesucht wird. Es ist stets

$$(2) \qquad -dz + p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n = 0.$$

Diese Gleichung kann nun im Verein mit (1) von zwei verschiedenen Gesichtspunkten aus betrachtet werden.

Erstens können wir aus Gleichung (1) den Werth irgend einer der Grössen $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ durch die übrigen ausdrücken, etwa

$$p_n = \vartheta(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1}, a) = \vartheta,$$

und dadurch geht (2) über in:

$$(3) \qquad -dz + p_1 dx_1 + \cdots + p_{n-1} dx_{n-1} + \vartheta dx_n = 0,$$

und dies ist eine Pfaff'sche Gleichung mit $2n$ Variablen

$$z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1}.$$

Dies ist der Gesichtspunkt, von welchem Pfaff bei Behandlung der Frage ausging.

Zweitens können wir (2) als eine Pfaff'sche Gleichung mit $2n+1$ Variablen $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ betrachten; da nun

bekanntlich eins der Integrale des äquivalenten Systems willkürlich angenommen werden kann (§ 69), so können wir Gleichung (1) als dieses Integral nehmen. Von diesem Gesichtspunkte aus betrachtete Natani die Frage.

Wir wollen von diesen beiden Gesichtspunkten der Reihe nach ausgehen, um das System der Hülfsgleichungen aufzustellen, die wesentlich einfacher sind als im allgemeinen Falle, da die Coefficienten der Elemente dp Null sind, und auf diese Weise die Lösung der Differentialgleichung anzudeuten.

Die Methode von Clebsch ist anerkanntermassen die Verallgemeinerung der Jacobi'schen Methode für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung auf das Pfaff'sche Problem, und demnach liefert seine Methode an sich keinen weiteren Vortheil vor der allgemeinen Jacobi'schen Theorie, d. h. keinen weiteren Vortheil in Bezug auf die Pfaff'sche Gleichung.

Die Anwendung der Lie'schen Methode, welche von Darboux im Wesentlichen wiederholt wurde, ist in § 136 als Beispiel gegeben und die Methode von Frobenius beschränkt sich ganz und gar auf die Transformation der Pfaff'schen Ausdrücke.

§ 107.

Um die Pfaff'sche Lösung der gegebenen Differentialgleichung zu erhalten, gehen wir aus von der Gleichung (3), die, in der Form

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_{n-1} dx_{n-1} + \vartheta dx_n + 0 . dp_1 + \cdots + 0 . dp_{n-1} + (-1) dz = 0$$

geschrieben, mit der allgemeinen in den vorhergehenden Kapiteln betrachteten Pfaff'schen Gleichung übereinstimmt, wenn in der letzteren gesetzt wird:

$$\begin{aligned} x_{2n} &= z; & x_{n+r} &= p_r \text{ für } r = 1, 2, \ldots, n-1 \\ X_{2n} &= -1; & X_{n+r} &= 0 \text{ für } r = 1, 2, \ldots, n-1 \\ X_n &= \vartheta; & X_r &= p_r \text{ für } r = 1, 2, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Um alsdann die Hülfsgleichungen (§ 55) zu bilden, bedürfen wir der Grössen $a_{i,j}$. Dieselben sind, wie man leicht findet:

$a_{i,j} = 0$, wenn weder i noch j grösser ist als $n - 1$;

$a_{n,i} = \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x_i}$ für $i = 1, \ldots, n-1$;

$a_{q,q} = 0$ stets für alle Werthe von q;

$$a_{n,n+r} = \frac{\partial \vartheta}{\partial p_r} \text{ für } r = 1, \ldots, n-1;$$

$$a_{n,2n} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z};$$

$$a_{n+r,r} = -1 \text{ für } r = 1, \ldots, n-1;$$

$$a_{n+r,i} = 0, \text{ wenn } i \text{ und } r \text{ verschieden sind, für } i = 1, \ldots, n-1;$$

$$a_{n+r,n+s} = 0 \text{ für } s = 1, \ldots, n \text{ und } r = 1, \ldots, n;$$

$$a_{2n,i} = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n-1.$$

Alsdann nehmen die bereits erwähnten Gleichungen die Form an:

$$X_i = -y_n \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + y_{n+1} \text{ für } i = 1, \ldots, n-1$$

$$X_{n+r} = -y_r - y_n \frac{\partial \vartheta}{\partial p_r} \text{ für } r = 1, \ldots, n-1$$

$$X_n = \sum_{i=1}^{n-1} y_i \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \sum_{r=1}^{n-1} y_{n+r} \frac{\partial \vartheta}{\partial p_r} + y_{2n} \frac{\partial \vartheta}{\partial z}$$

$$X_{2n} = -y_n \frac{\partial \vartheta}{\partial z}.$$

Da nun $\vartheta = p_n$ aus der Gleichung (1) abgeleitet ist, so haben wir:

$$\frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial \vartheta}{\partial p_r} + \frac{\partial f}{\partial p_r} = 0 \text{ für } r = 1, \ldots, n$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Setzen wir nun für die Ableitungen von ϑ ihre Werthe nach Einsetzung der Werthe der Grössen X ein und beachten wir die Definitionen der Grössen y (Gleichungen (9) in § 55), so erhalten wir:

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial f}{\partial p_1}} = \cdots = \frac{dx_n}{\frac{\partial f}{\partial p_n}} = \frac{dz}{P} = \frac{dp_1}{P_1} = \cdots = \frac{dp_n}{P_n}\text{*)},$$

wo

---

*) Dies sind die Hülfsgleichungen für die Ableitung des ersten Integrals bei der in dem Beispiel des § 213 des „Lehrbuchs" angegebenen Gleichungsform; dieselben entsprechen natürlich dem Hülfssystem für die einfachere in § 215 des „Lehrbuchs" behandelte Gleichungsform.

$$P_i = -\frac{\partial f}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial f}{\partial z} \text{ für } i = 1, \ldots, n$$

$$P = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

und der Werth von μ ist:

$$-\frac{1}{P}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

§ 108.

Bei der Pfaff'schen Auflösungsmethode muss man das eben gefundene Hülfssystem integriren und die $2n-1$ von $f=a$ verschiedenen Integrale zur Transformation der ursprünglichen Gleichung benutzen. Eins der so benutzten Integrale wird als ein Integral der ursprünglichen Gleichung genommen und die transformirte Gleichung geht über in eine Gleichung mit $2n-2$ Variablen.

Wir gehen nun wie in dem bereits betrachteten allgemeinen Falle weiter. Wir müssen also n Hülfsgleichungssysteme integriren und jedes Hülfssystem führt zu einem Integral der Differentialgleichung. Schliesslich erhalten wir auf diese Weise n Integrale, welche die Variablen $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ und n willkürliche Constanten enthalten; werden aus diesen n Gleichungen zusammen mit $f=a$ die n Grössen $p_1, \ldots, p_n$ eliminirt, so resultirt eine Gleichung zwischen $z, x_1, \ldots, x_n$ und n willkürlichen Constanten, welche das vollständige Integral der Gleichung ist.

§ 109.

Der letzte Abschnitt verlangt, dass n Systeme von Hülfsgleichungen integrirt werden sollen. Eine grosse Vereinfachung wurde von Jacobi eingeführt, durch welche nur allein die Integration des ersten Systems erforderlich wird. Dies wurde bewirkt durch die Einführung der Anfangswerthe der Variablen*) — ein Schritt,

*) Vergleiche die Abhandlung: „Ueber die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Anzahl Variablen auf die Integration eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen", Crelle's J. Bd. 17 (1837), S. 97—162, besonders § 9, S. 136 u. ff. oder Ges. Werke Bd. 4, S. 57—127, besonders S. 100 u. ff.

Der Gedanke der Einführung dieser Anfangswerthe wird daselbst Hamilton zugeschrieben in seinen damals neuen Untersuchungen über Dynamik und in-

der mit der Herstellung der Hauptintegrale eines Systems von Differentialgleichungen zusammenhängt.

Es seien

$$u_1 = a_1,\ u_2 = a_2,\ \ldots,\ u_{2n-1} = a_{2n-1}$$

ein System von $2n - 1$ unabhängigen Integralen des Hülfssystems, welches in der Form genommen werden kann:

$$P\frac{\partial x_r}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial p_r} \text{ für } r = 1, \ldots, n$$

$$P\frac{\partial p_r}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial x_r} - p_r\frac{\partial f}{\partial z} \text{ für } r = 1, \ldots, n,$$

während das letzte Integral des Systems die gegebene Gleichung

$$f = a$$

ist.

Nimmt man $z, u_1, \ldots, u_{2n-1}$ als neues System von Variablen und drückt man $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ durch $z, u_1, \ldots, u_{2n-1}$ aus, so werden, wenn die Werthe in das vorstehende Hülfssystem substituirt werden, diese Gleichungen zu Identitäten. Da nun:

$$P = p_1\frac{\partial f}{\partial p_1} + \cdots + p_n\frac{\partial f}{\partial p_n}$$

ist, so erhalten wir aus den ersten n Gleichungen:

$$1 = p_1\frac{\partial x_1}{\partial z} + \cdots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial z},$$

welche nach Substitution der genannten Werthe eine Identität ist. Sie giebt durch Differentiation:

$$0 = \frac{\partial p_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial z} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial u}\frac{\partial x_n}{\partial z}$$
$$+ p_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial z} + p_2\frac{\partial^2 x_2}{\partial u\,\partial z} + \cdots + p_n\frac{\partial^2 x_n}{\partial u\,\partial z}$$

für jede der Grössen u, und dieses führt mittels der ersten n Gleichungen zu

$$\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial u} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial u} = -P\left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial z} + \cdots + p_n\frac{\partial^2 x_n}{\partial u\,\partial z}\right).$$

---

folge dessen wird die Methode oft die Jacobi-Hamilton'sche genannt. Es ist jedoch von Lie, Math. Annal. Bd. 8, S. 215 (Anmerk.) und von Mansion „Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung" (Julius Springer, Berlin, 1892) S. 115 (Anm.) hervorgehoben werden, dass die Methode in Wirklichkeit von Cauchy herrührt, der sie im Jahre 1819 veröffentlichte. Vergl. Cauchy's Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique Bd. 2, S. 270—272.

Ebenso ist die Gleichung $f = a$ eine Identität, wenn die genannten Werthe substituirt werden; daher:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial u} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u}$$

(wenn man beachtet, dass $u_1, \ldots, u_{2n-1}, z$ die $2n$ unabhängigen Veränderlichen sind) oder mit Benutzung der letzten n Gleichungen des Hülfssystems, wenn dieselben als zur Bestimmung der Grössen $\frac{\partial f}{\partial x}$ dienend betrachtet werden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial u} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial u} = \frac{\partial x_1}{\partial u}\left(P\frac{\partial p_1}{\partial z} + p_1\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ + \frac{\partial x_n}{\partial u}\left(P\frac{\partial p_n}{\partial z} + p_n\frac{\partial f}{\partial z}\right).\end{aligned}$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke für $\sum \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial u}$ einander gleich, so erhält man:

$$\begin{aligned}P\left\{\left(p_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial z} + \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial p_1}{\partial z}\right) + \cdots + \left(p_n\frac{\partial^2 x_n}{\partial u\,\partial z} + \frac{\partial x_n}{\partial u}\frac{\partial p_n}{\partial z}\right)\right\} \\ + \frac{\partial f}{\partial z}\left(p_1\frac{\partial x_1}{\partial u} + \cdots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial u}\right) = 0\end{aligned}$$

und daher durch Integration:

$$p_1\frac{\partial x_1}{\partial u} + \cdots + p_n\frac{\partial x_n}{\partial u} = Ce^{-\int^z \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{P}},$$

wo C eine von z unabhängige Grösse ist.

An dieser Stelle nun werden die „Anfangswerthe" eingeführt. Da C von z unabhängig ist, so wird sein Werth nicht geändert, wenn z irgend ein besonderer Werth z. B. der Werth Null beigelegt wird. Es seien die Werthe der Variablen x für diesen Werth von z resp. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ und diejenigen der Variablen p resp. $\pi_1, \ldots, \pi_n$, Werthe, die sämmtlich Functionen von $u_1, \ldots, u_{2n-1}$ sind, die durch die $2n$ unabhängigen Gleichungen bestimmt werden:

$$\left.\begin{aligned} f(0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \pi_1, \ldots, \pi_n) &= a \\ u_i(0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \pi_1, \ldots, \pi_n) &= a_i = u_i \end{aligned}\right\}$$
$$(i = 1, \ldots, 2n-1).$$

Die hieraus sich ergebenden Resultate haben die Form:

$$\begin{aligned}\xi_i &= \text{Function } (a, u_1, \ldots, u_{2n-1}) \\ &= \text{Function } (z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n),\end{aligned}$$

wenn man für a den Werth $f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ und für u_i seinen Werth ausgedrückt durch z, x, p substituirt; und die Form dieser Function ist derart, dass, wenn man $z = 0$ setzt, dieselbe sich auf x_i reducirt.

Um C zu bestimmen, setzen wir diese gleichzeitigen Werthe in die oben erhaltene Gleichung ein, indem wir (weil dies der besondere Werth von z ist) Null als untere Grenze des Integrals in dem Exponentialausdruck nehmen, und erhalten:

$$\pi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial u} + \cdots + \pi_n \frac{\partial \xi_n}{\partial u} = C,$$

so dass:

$$p_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} + \cdots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial u} = \left(\pi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial u} + \cdots + \pi_n \frac{\partial \xi_n}{\partial u}\right) e^{-\int\limits_0^z \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{P}}.$$

Substituiren wir nun für $x_1, \ldots, x_n$ ihre Werthe, ausgedrückt durch $z, u_1, \ldots, u_{2n-1}$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} &- dz + p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n \\ &= dz \left(-1 + p_1 \frac{\partial x_1}{\partial z} + \cdots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial z}\right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2n-1} p_i \frac{\partial x_i}{\partial u_j} du_j. \end{aligned}$$

Die linke Seite ist Null; der Coefficient von dz auf der rechten Seite verschwindet, wie er in der That soll, da wir eine Pfaff'sche Reduction ausführen, und daher wird die ursprüngliche Gleichung ersetzt durch:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2n-1} p_i \frac{\partial x_i}{\partial u_j} du_j = 0.$$

Substituirt man für $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial u}$ seinen Werth aus der obigen Gleichung und wirft man den Exponentialfactor, welcher keine Lösung der Gleichung liefert, ab, so erhält man:

$$\sum_{j=1}^{2n-1} \left(\pi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial u_j} + \cdots + \pi_n \frac{\partial \xi_n}{\partial u_j}\right) du_j = 0.$$

Die Grössen ξ_i in dieser Gleichung sind Functionen allein von $a, u_1, \ldots, u_{2n-1}$ und ebenso auch die Grössen π; daher enthält die neue Gleichung nur $2n-1$ Variable und ist somit die Transformation der ursprünglichen Pfaff'schen Gleichung. Ferner aber haben wir, da ξ eine Function nur von den Veränderlichen u ist:

$$\frac{\partial \xi}{\partial u_1} du_1 + \cdots + \frac{\partial \xi}{\partial u_{2n-1}} du_{2n-1} = d\xi$$

und daher wird die Gleichung:

$$\pi_1 d\xi_1 + \pi_2 d\xi_2 + \cdots + \pi_n d\xi_n = 0,$$

d. h. sie ist die der ursprünglichen Gleichung äquivalente reducirte Normalform.

Wie wir bereits in § 69 gesehen haben, ist ein Integralsystem derselben:

$$\xi_1 = c_1, \quad \xi_2 = c_2, \ldots, \quad \xi_n = c_n,$$

wo die c Constanten sind. Somit erhalten wir das folgende **Resultat:**

Um die Gleichung:

$$f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a$$

zu integriren, bilde man das Hülfssystem von $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial f}{\partial p_1}} = \cdots = \frac{dx_n}{\frac{\partial f}{\partial p_n}} = \frac{dz}{P} = \frac{dp_1}{P_1} = \cdots = \frac{dp_n}{P_n},$$

wo

$$P_i = -\frac{\partial f}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots, n$$

und

$$P = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

ist. Ferner möge

$$u_s = u_s(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = \text{const.} = a_s$$
$$(s = 1, 2, \ldots, 2n-1)$$

ein System von $2n-1$ Integralen, die von einander und von $f = a$ unabhängig sind (und die im Verein mit $f = a$ ein vollständiges Integralsystem des Hülfssystems bilden), darstellen und es mögen die $2n$ Gleichungen

$$f(0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \pi_1, \ldots, \pi_n) = a$$
$$u_s(0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \pi_1, \ldots, \pi_n) = a_s$$

nach den n Grössen ξ aufgelöst sein, so dass dieselben dargestellt sind in der Form:

$$\xi_r = \varphi_r(a, a_1, \ldots, a_{2n-1})$$

für $r = 1, 2, \ldots, n$. Alsdann führt die Elimination der Grössen $p_1, \ldots, p_n$ aus den $n+1$ Gleichungen

$$f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a$$
$$\varphi_r(a, u_1, \ldots, u_{2n-1}) \qquad = a_r,$$

nachdem in φ_r für die Grössen u ihre Werthe

$$u_r(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$$

substituirt sind, zu einer Gleichung zwischen den Variablen $z, x_1, \ldots, x_n$ und den n willkürlichen Constanten a_r. Diese Gleichung stellt das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung dar.

§ 110.

Auf die Form, auf welche die vorige Betrachtung der Beziehung zwischen $f = a$ und $dz = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$ führen würde, wenn Natani's Methode für die Reduction benutzt wird, ist bereits in § 92 kurz Bezug genommen worden. Das **Resultat** ist dem vorhergehenden analog und kann wie folgt ausgesprochen werden:

Sind

$$u_i(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = \text{const.}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 2n - 1)$$

$2n - 1$ von einander unabhängige und von $f = a$ verschiedene Integrale des Hülfssystems, so führt die Elimination von $p_1, \ldots, p_n, \pi_1, \ldots, \pi_n$ aus den $2n + 1$ Gleichungen

$$f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = a$$
$$f(0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \pi_1, \ldots, \pi_n) = a$$
$$u_i(z, x_1 \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = u_i(0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \pi_1, \ldots, \pi_n)$$

(wo $i = 1, \ldots, 2n - 1$) zu einer Gleichung zwischen $z, x_1, \ldots, x_n$, welche n willkürliche Constanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ enthält und das vollständige Integral der Differentialgleichung ist.

§ 111.

Wir gehen nunmehr zur Betrachtung der zweiten möglichen Beziehung zwischen $f = a$ und der Gleichung

$$-dz + p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n = 0$$

über, bei welcher die Gleichung zwischen den Differentialelementen als eine Gleichung mit $2n + 1$ Variablen betrachtet wird und für welche $f = a$ dasjenige Integral ist, welches willkürlich angenommen werden kann.

Die vorige Gleichung stimmt überein mit

$$\sum_{i=1}^{2n+1} X_i dx_i = 0,$$

wenn wir setzen:

$$x_{n+r} = p_r \text{ für } r = 1, \ldots, n;\ x_{2n+1} = z$$
$$X_{n+r} = 0 \text{ für } r = 1, \ldots, n;\ X_{2n+1} = -1.$$
$$X_s = p_s \text{ für } s = 1, \ldots, n.$$

Und dann ist:

$a_{m,s} = 0$ für m und $s = 1, \ldots, n$

$a_{m,n+m} = 1$ für $m = 1, \ldots, n$

$a_{m,n+s} = 0$ für $m = 1, \ldots, n$ und $s = 1, \ldots, n+1$, wenn m und s ungleich sind,

$a_{m+r,n+s} = 0$ für r und $s = 1, \ldots n+1$.

Bilden wir dann die Hülfsgleichungen wie in § 93 und 102 und nehmen wir insbesondere die letztere Form, so erhalten wir das vollständige System:

$$p_s \delta t_1 = \frac{\partial f}{\partial x_s} \delta\mu - t_1 \delta p_s \text{ für } s = 1, \ldots, n$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial p_s} \delta\mu + t_1 \delta x_s \text{ für } s = 1, \ldots, n$$

$$-\delta t_1 = \frac{\partial f}{\partial z} \delta\mu,$$

in welchem nur eine unabhängige Variable auftritt.

Ist $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, d. h. ist die gegebene Differentialgleichung explicit unabhängig von z, so ist $\delta t_1 = 0$ und die Hülfsgleichungen nehmen die einfache (Hamilton'sche) Form an:

$$\cdots = \frac{dx_s}{-\frac{\partial f}{\partial p_s}} = \cdots = \frac{dp_r}{\frac{\partial f}{\partial x_r}} = \cdots$$

Ist dagegen $\frac{\partial f}{\partial z}$ von Null verschieden, so nehmen die Gleichungen die Form an:

$$\cdots = \frac{dx_s}{-\frac{\partial f}{\partial p_s}} = \cdots = \frac{dp_r}{\frac{\partial f}{\partial x_r} + p_r \frac{\partial f}{\partial z}} = \cdots,$$

wobei in jedem Falle die Gleichungen mit $f = a$ zusammen zu nehmen sind.

Es besteht demnach das Hülfssystem im Ganzen aus $2n-1$ Gleichungen und es muss somit $2n-1$ Integrale geben und $f=a$ ist kein Integral des Systems, wofern wir mit demselben nicht

$$dz=\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$$

zusammennehmen. Alsdann sind in dem System $2n$ Gleichungen vorhanden und dasselbe besitzt $2n$ Integrale. Nehmen wir die Hauptintegrale und bezeichnen dieselben durch $x_1', \ldots, x_n', p_1', \ldots, p_n'$ für $z=0$, so haben wir nach § 94:

$$A\left(-dz+\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i\right)=\mu df+A'\sum_{i=1}^{n} p_i' dx_i'$$

oder, da beständig $f=a$:

$$-dz+\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i=\frac{A'}{A}\sum_{i=1}^{n} p_i' dx_i'$$

und daher wird die Differentialgleichung ersetzt durch:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i' dx_i'=0,$$

und ein Integralsystem hiervon ist:

$$x_1'=c_1, \ldots, x_n'=c_n.$$

Dies führt zu demselben Resultat wie in § 110.

Für $n=2$ z. B. ist das Hülfssystem:

$$\frac{dx_1}{-\frac{\partial f}{\partial p_1}}=\frac{dx_2}{-\frac{\partial f}{\partial p_2}}=\frac{dp_1}{\frac{\partial f}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{dp_2}{\frac{\partial f}{\partial x_2}+p_2\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{dz}{-p_1\frac{\partial f}{\partial p_1}-p_2\frac{\partial f}{\partial p_2}}$$

und jeder dieser Brüche ist gleich:

$$-\frac{d\mu}{t_1} \quad \text{und} \quad \frac{dt_1}{t_1\frac{\partial f}{\partial z}},$$

wie im allgemeinen Falle für einen beliebigen Werth von n.

Wenn die Integrale, ausser $f=a$ noch drei an der Zahl, des Haupttheils des Hülfssystems bekannt sind, so wird t_1 durch eine Quadratur bestimmt und daraus findet man A (und daher, indem man in A die Hauptintegrale substituirt, A'); und wenn t_1 bekannt ist, so ist μ durch eine blosse Quadratur bestimmbar.

In der Wirklichkeit jedoch kann man diese Quadraturen vermeiden, wenn nur das eigentliche Resultat gewünscht wird, ohne die explicite Form aller Zwischenstadien. Nehmen wir z. B. die Gleichung

$$p_1^2 + p_2^2 + 2z + x_1^2 + x_2^2 = a,$$

so ist das Hülfssystem:

$$\frac{dx_1}{-p_1} = \frac{dx_2}{-p_2} = \frac{dp_1}{x_1 + p_1} = \frac{dp_2}{x_2 + p_2} = \frac{dz}{-p_1^2 - p_2^2}.$$

Drei von dem gegebenen verschiedene Integrale des Systems sind:

$$p_2 - \omega x_2 = A(p_1 - \omega x_1)$$
$$(\omega p_1 - x_1)^\omega = B(p_1 - \omega x_1)$$
$$(\omega p_2 - x_2)^\omega = C(p_1 - \omega x_1),$$

wo ω eine dritte Wurzel der Einheit ist und A, B, C Constanten sind. Dann ist leicht zu sehen, dass das vollständige Integral der gegebenen Gleichung erhalten wird durch Elimination der Grössen p_1, p_2, π_1, π_2 aus den Gleichungen:

$$p_1^2 + p_2^2 + 2z + x_1^2 + x_2^2 = a$$
$$\pi_1^2 + \pi_2^2 + \alpha^2 + \beta^2 = a$$
$$\frac{p_2 - \omega x_2}{p_1 - \omega x_1} = \frac{\pi_2 - \omega\beta}{\pi_1 - \omega\alpha}$$
$$\frac{(\omega p_1 - x_1)^\omega}{p_1 - \omega x_1} = \frac{(\omega\pi_1 - \alpha)^\omega}{\pi_1 - \omega\alpha}$$
$$\frac{(\omega p_2 - x_2)^\omega}{p_1 - \omega x_1} = \frac{(\omega\pi_2 - \beta)^\omega}{\pi_1 - \omega\alpha},$$

wo α und β willkürliche Constanten sind.

Aufgabe. Man behandle in analoger Weise die Gleichungen*):

(1) $$(1 + p_1^2 + p_2^2)z^2 = a$$

(2) $$ax_1 + bz - p_1 + f(x_1, p_2) = 0.$$

§ 112.

Natani giebt auch im Zusammenhange mit § 33 an, welches der erste Schritt zur Ausdehnung der vorhergehenden Methode auf die Integration eines Systems simultaner partieller

*) Dieselben sind aus Natani's „Die höhere Analysis" (1866) entnommen, in welcher auf S. 341—353 speciell von der Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung gehandelt wird.

Differentialgleichungen erster Ordnung ist. Dies wird genügend deutlich werden, wenn wir es an einem System von zwei Gleichungen

$$f = a, \quad u_1 = b$$

erläutern.

Verfahren wir dann wie im entsprechenden Falle für die totale Differentialgleichung, so finden wir, dass die Gleichungen, welche das Hülfssystem für die Gleichung

$$A\left\{-dz + \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i\right\} = \mu\, df + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i du_i$$

$$= \mu\, df + \alpha_1 du_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i du_i$$

bilden, die Form annehmen:

$$p_s \delta t_1 = \frac{\partial f}{\partial x_s}\delta\mu + \frac{\partial u_1}{\partial x_s}\delta\alpha_1 - t_1\delta p_s$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial p_s}\delta\mu + \frac{\partial u_1}{\partial p_s}\delta\alpha_1 + t_1\delta x_s$$

$$-\delta t_1 = \frac{\partial f}{\partial z}\delta\mu + \frac{\partial u_1}{\partial z}\delta\alpha_1,$$

worin die beiden ersten für $s = 1, \ldots, n$ gelten. In diesem System treten zwei unabhängige Veränderliche auf, welche als μ und α_1 genommen werden können.

Setzt man:

$$\frac{\partial}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{d x_s},$$

so führt die Elimination von δt_1 zu:

$$0 = \frac{df}{dx_s}\delta\mu + \frac{du_1}{dx_s}\delta\alpha_1 - t_1\delta p_s.$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial p_s}\delta\mu + \frac{\partial u_1}{\partial p_s}\delta\alpha_1 + t_1\delta x_s.$$

Die Existenz dieser Gleichungen involvirt eine gewisse Relation zwischen f und u_1; denn es ist:

$$\left(\frac{du_1}{dx_s}\frac{\partial f}{\partial p_s} - \frac{df}{dx_s}\frac{\partial u_1}{\partial p_s}\right)\delta\alpha_1 = \frac{df}{dx_s}\delta x_s + \frac{\partial f}{\partial p_s}\delta p_s$$

und daher:

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{du_1}{dx_s}\frac{\partial f}{\partial p_s} - \frac{df}{dx_s}\frac{\partial u_1}{\partial p_s}\right)\delta\alpha_1 = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{df}{dx_s}\delta x_s + \frac{\partial f}{\partial p_s}\delta p_s\right)$$

$$= df = 0,$$

somit ist

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{du_1}{dx_s}\frac{\partial f}{\partial p_s}-\frac{df}{dx_s}\frac{\partial u_1}{\partial p_s}\right)=0$$

eine nothwendige Relation*).

Nehmen wir an, dass diese Bedingung befriedigt ist, so führt jede der vorhergehenden Gleichungen zu zwei anderen und daher bestehen die neuen Hülfsgleichungen aus den unabhängigen Gleichungen der Systeme

$$\left.\begin{aligned}\frac{df}{dx_s}-t_1\frac{\partial p_s}{\partial \mu}=0\\ \frac{\partial f}{\partial p_s}+t_1\frac{\partial x_s}{\partial \mu}=0\end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned}\frac{du_1}{dx_s}-t_1\frac{\partial p_s}{\partial \alpha_1}=0\\ \frac{\partial u_1}{\partial p_s}+t_1\frac{\partial x_s}{\partial \alpha_1}=0\end{aligned}\right\},$$

welches zwei Systeme von Gleichungen sind. Alsdann wird, wie im § 103, ein vollständiges System von Integralen gegeben durch α_1, $u_2, \ldots, u_n, \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha_2}$ und jedes gemeinsame Integral der beiden Systeme ist eine Function dieser Integrale.

Ein solches gemeinsames Integral sei ϑ. Da es dem ersten System genügt, so ist, wie oben:

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{d\vartheta}{dx_s}\frac{\partial f}{\partial p_s}-\frac{df}{dx_s}\frac{\partial \vartheta}{\partial p_s}\right)=0.$$

Nimmt man nun an, dass ϑ als Function des Systems $\alpha_1, u_2, \ldots, u_n$, $\frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha_2}$ dargestellt sei, so hat man:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha_1}&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_s}\frac{\partial x_s}{\partial\alpha_1}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\vartheta}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\alpha_1}\\ &=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x_s}+p_s\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)\frac{\partial x_s}{\partial\alpha_1}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\vartheta}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial\alpha_1},\end{aligned}$$

denn in dem Hülfssystem kommt die implicite Gleichung vor:

---

*) Dieselbe ist weder in seiner Abhandlung noch in seinem Buche von Natani explicit angegeben worden. Allerdings bot sich demselben auch keine Gelegenheit dazu, da er $u_1 = b$ als Integral des ersten Hülfssystems betrachtet und die Wirkung des Bekanntseins eines solchen auf die Verminderung der für jenes Hülfssystem erforderlichen Integrationen untersucht.

Die zu der vorigen äquivalente Relation in Bezug auf ein zweites Integral u_2 ist von ihm explicit gegeben worden.

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha_1} = \sum_{s=1}^{n} p_s \frac{\partial x_s}{\partial \alpha_1}$$

und daher:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{t_1} \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial p_s} \frac{d u_1}{d x_s} - \frac{\partial u}{\partial p_s} \frac{d \vartheta}{d x_s} \right).$$

Ist ϑ ein Integral der verlangten Differentialgleichung, so muss dasselbe von α_1 unabhängig sein und die rechte Seite muss verschwinden. Verschwindet die rechte Seite nicht, so haben wir dieselbe Reihe von Alternativen für das Hülfssystem wie in § 104 und mutatis mutandis ist die dort gegebene Discussion auch hier anwendbar.

Aufgabe. Man integrire nach der Pfaff'schen Methode die simultanen Gleichungen

$$p_1 = p_2 z = p_3 z^2,$$

wo die Variable z von drei Veränderlichen x_1, x_2, x_3 abhängt und p_1, p_2, p_3 ihre Ableitungen nach diesen drei Veränderlichen sind.

Ebenso integrire man die Gleichungen:

$$p_1 = p_2 z = p_3 z^2 = p_4 z^3,$$

wo analoge Bezeichnungen angewendet sind. (Raabe.)

8. Kapitel.

Methode von Clebsch.

§ 113.

Wir haben in § 68 bereits gesehen, dass ein $2n$ oder $2n-1$ Differentialelemente enthaltender Ausdruck auf einen Ausdruck reducirt werden kann, welcher nicht mehr als n solcher Elemente enthält, dass aber bei jedem Schritte der daselbst in Anwendung gebrachten Reductionsmethode verschiedene Alternativen möglich sind und daher jede so erhaltene reducirte Form nicht die einzige ihrer Art ist.

Wenn indessen eine reducirte Form erhalten ist, so können alle andern aus derselben durch das folgende Verfahren, welches eine Verallgemeinerung jeder speciellen Lösung des Pfaff'schen Problems bildet, abgeleitet werden.

Die kleinstmögliche Anzahl der Differentialelemente in der reducirten Form eines gegebenen Ausdrucks sei m und eine solche Form sei dargestellt durch:

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_m df_m,$$

worin zwischen den Grössen F und f keine identische Relation besteht.

Eine andere (und daher*) äquivalente) reducirte Form sei

$$\Phi_1 d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2 + \cdots + \Phi_m d\varphi_m,$$

worin ebenfalls zwischen den Grössen Φ und φ keine identische Relation besteht. Dann ist:

$$\sum_{\lambda=1}^{m} F_\lambda df_\lambda = \sum_{\mu=1}^{m} \Phi_m d\varphi_m,$$

und daher können wir, da die Grössen auf jeder Seite unabhängig von einander sind, die $2m$ Grössen Φ und φ als Functionen der $2m$

*) Vergl. § 142.

unabhängigen Grössen F und f betrachten, welche zu bestimmen sind aus den Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} F_i = \Phi_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial f_i} + \Phi_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial f_i} + \cdots + \Phi_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial f_i} \\[2ex] 0 \;= \Phi_1 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial F_j} + \Phi_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial F_j} + \cdots + \Phi_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial F_j} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}.$$

Werden die Coefficienten Φ aus dem zweiten System von Gleichungen eliminirt, so ergiebt sich das Resultat:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_m)} = 0.$$

Nun sind die m Grössen φ Functionen von $F_1, F_2, \ldots, F_m, f_1, \ldots, f_m$ und die letzte Gleichung zeigt, dass aus den m Gleichungen, welche diese Abhängigkeit darstellen, die m Grössen F eliminirt werden können. Das Resultat ist daher von der Form:

$$(2)\qquad \Pi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, f_1, f_2, \ldots, f_m) = 0.$$

Ueberdies kann diese Function Π, da die einzige zu erfüllende Bedingung die durch die obige Jacobi'sche Functionalgleichung dargestellte ist, vollkommen willkürlich genommen werden.

In Gleichung (2) kommen die Grössen F nur implicit vor infolge ihrer Einführung durch die Grössen φ. Demnach erhalten wir für jeden der Indices $j = 1, 2, \ldots, m$:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial F_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial F_j} + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_m}\frac{\partial \varphi_m}{\partial F_j} = 0,$$

und hieraus ergiebt sich durch Vergleichung mit dem zweiten System von m Gleichungen in (1):

$$(3)\qquad \Phi_r = \lambda \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, m),$$

wo λ ein unbestimmter Factor ist. Andererseits kommen in Gleichung (2) die Grössen f sowohl implicit infolge ihrer Einführung durch die Grössen φ als auch explicit vor und daher ist:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial f_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial f_i} + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_m}\frac{\partial \varphi_m}{\partial f_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial f_i} = 0.$$

Demnach ergiebt sich hieraus mittels des ersten Systems von m Gleichungen in (1):

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
F_i &= \Phi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_i} + \Phi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial f_i} + \cdots + \Phi_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial f_i} \\
&= \lambda \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial f_i} + \cdots + \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_m} \frac{\partial \varphi_m}{\partial f_i} \right) \\
&= -\lambda \frac{\partial \Pi}{\partial f_i}.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen (2), (3), (4) enthalten die angedeutete Verallgemeinerung. Sie reichen aus, um die m Grössen φ, die m Grössen Φ und die (überflüssige) Grösse λ durch die gegebenen Grössen F und f zu bestimmen, und somit ist es möglich, aus einer gegebenen reducirten Form $\Sigma F df$ eine reducirte Form $\Sigma \Phi d\varphi$ herzuleiten. Der Gang des Beweises zeigt, dass, wenn Π die allgemeinste Function ist, welche möglich ist, die abgeleitete reducirte Form die allgemeinste reducirte Form, die möglich ist, darstellt.

Bezüglich der Integralgleichungen, welche die Lösung der Pfaffschen Gleichung bilden, sind die Grössen φ die wichtigsten Elemente. Dieselben sind bestimmt durch die m Gleichungen:

$$
\Pi = 0
$$
$$
\frac{1}{F_1} \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} = \frac{1}{F_2} \frac{\partial \Pi}{\partial f_2} = \cdots = \frac{1}{F_m} \frac{\partial \Pi}{\partial f_m}
$$

und sind daher von der Form:

$$
(5)\qquad \varphi_i = \psi_i\left(f_1, f_2, \ldots, f_m, \frac{F_1}{F_m}, \frac{F_2}{F_m}, \ldots, \frac{F_{m-1}}{F_m}\right),
$$

wo ψ_i, eine willkürliche Function, in ihrer Form abhängig ist von Π. Unter diesen willkürlichen Functionen ψ_i darf offenbar keine identische Relation bestehen.

Es mag indessen bemerkt werden, dass, obwohl die Functionen ψ im allgemeinen Falle willkürlich und durch keine identische Relation mit einander verbunden sind, dieselben doch sämmtlich der Form nach durch die einzige willkürliche Function Π bestimmt sind. Man darf daher nicht annehmen, dass irgendwelche m der $2m-1$ Grössen

$$
f_1, f_2, \ldots, f_m, \frac{F_1}{F_m}, \frac{F_2}{F_m}, \ldots, \frac{F_{m-1}}{F_m}
$$

zur Darstellung der m Grössen φ gewählt werden können; irgend eine, oder irgendwelche Combination derselben, kann für eine der Grössen φ genommen werden, indessen werden einige der übrigbleibenden φ von der Form der gewählten Function abhängig sein und dies kann auch bei sämmtlichen der Fall sein.

Beispiel 1. Ein sehr einfacher in (5) eingeschlossener Fall wird durch eine unmittelbare Transformation gegeben. Da

$$F_1 df_1 + \cdots + F_m df_m = F_m d\left(f_m + \frac{F_{m-1}}{F_m} f_{m-1} + \cdots + \frac{F_1}{F_m} f_1\right)$$
$$- F_m f_{m-1} d \frac{F_{m-1}}{F_m} - \cdots - F_m f_1 d \frac{F_1}{F_m}$$

ist, so wird dieser besondere Fall gegeben durch

$$\varphi_i = \frac{F_i}{F_m}$$

für $i = 1, 2, \ldots, m - 1$ und

$$\varphi_m = \frac{F_1}{F_m} f_1 + \frac{F_2}{F_m} f_2 + \cdots + \frac{F_{m-1}}{F_m} f_{m-1} + f_m.$$

Beispiel 2. Die vorher angenommene Gleichung (2) ist die allgemeinste Form, weil die Variationen der Grössen φ und f auf diese Weise am wenigsten beschränkt sind. Die Jacobi'sche Functionalgleichung, welche zu (2) führt, würde auch erfüllt sein infolge einer Anzahl von Beziehungsgleichungen zwischen den φ's und f's wie

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \ldots, \Pi_\mu = 0,$$

indessen ist leicht zu sehen, dass die Lösung, zu welcher diese führen, nur ein specieller Fall der bereits gegebenen ist.

§ 114.

Die **Resultate** der vorhergehenden Untersuchung sind: Erstens: Wenn irgend eine aus der charakteristischen Mindestzahl von Integralgleichungen bestehende Lösung der Pfaff'schen Gleichung gefunden ist, so kann diese zur Ermittelung der allgemeinsten Lösung benutzt werden; und zweitens: Die allgemeinste Lösung lässt sich aus jeder besonderen Lösung herleiten. Denn wenn die Grössen $f_1, \ldots, f_m$ bekannt sind, so können die Grössen $F_1, F_2, \ldots, F_m$ unmittelbar aus m unabhängigen Gleichungen von der Form

$$X_r = \sum_{i=1}^{m} F_i \frac{\partial f_i}{\partial x_r}$$

erhalten werden und dies sind die Grössen, welche für die gesuchte Verallgemeinerung erforderlich sind. Es reicht daher aus, nur eine specielle Lösung zu kennen, um daraus die allgemeinste Lösung der Pfaff'schen Differentialgleichung zu erhalten.

§ 115.

An der Stelle, wo Clebsch die Bestimmung der Elemente irgend einer speciellen Lösung betrachtet, wird es nothwendig, zwischen zwei Fällen zu unterscheiden, je nachdem die Determinante aus den Elementen $a_{i,j}$ (wie sie bei der Pfaff'schen Reduction vorkommen) verschwindet oder nicht. Die beiden Fälle sind dieselben wie die, welche bei jener Reduction auftreten.

Zuerst möge der Fall betrachtet werden, in welchem die Determinante entweder von Null verschieden ist oder nur infolge zufällig befriedigter Bedingungen unter den Coefficienten verschwindet. Der andere Fall, in welchem die Determinante identisch verschwindet, soll später erörtert werden.

Wir beginnen mit einer keiner Bedingung unterliegenden Differentialgleichung mit einer geraden Anzahl ($2n$) von Veränderlichen. Es wird eine reducirte Form einer solchen Gleichung

$$\Omega = \sum_{i=1}^{2n} X_i dx_i = 0$$

dargestellt durch:

$$F_1 df_1 + \cdots + F_n df_n = 0.$$

Ist irgend ein Ausdruck von der in § 113 betrachteten Art gefunden, so dass man hat:

$$\varphi_n = \varphi_n \left(f_1, \ldots, f_n, \frac{F_1}{F_n}, \ldots, \frac{F_{n-1}}{F_n}\right),$$

so erhält man mittels $\varphi_n = \text{const.} = a_n$ eine reducirte Form, welche gegeben wird durch

$$\Phi_1 d\varphi_1 + \cdots + \Phi_{n-1} d\varphi_{n-1}$$

und zu $\varphi_n = a_n$ associirt ist. Ersetzen wir irgend eine der Variablen, etwa x_{2n}, durch ihren aus $\varphi_n = a_n$ sich ergebenden Werth, so tritt an die Stelle von Ω ein anderer Ausdruck Ω' mit nicht mehr als $2n - 1$ Variablen, etwa

$$\Omega' = \sum_{i=1}^{2n-1} X_i' dx_i,$$

von welcher eine äquivalente reducirte Form ist:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \Phi_j d\varphi_j,$$

die nur $n - 1$ Differentialelemente enthält.

Nimmt man nun an, dass für $\Omega' = 0$ die Variable irgend eines Differentialelements einer äquivalenten reducirten Form in der Gestalt

$$\vartheta_{n-1} = \vartheta_{n-1}\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \frac{\Phi_1}{\Phi_{n-1}}, \ldots, \frac{\Phi_{n-2}}{\Phi_{n-1}}\right)$$

erhalten werden kann, so dass eine zu $\vartheta_{n-1} = \text{const.} = a_{n-1}$ gehörige reducirte Form gegeben wird durch

$$\Theta_1 d\vartheta_1 + \cdots + \Theta_{n-2} d\vartheta_{n-2},$$

so geht der Ausdruck Ω', wenn man für irgend eine der Variablen, etwa für x_{2n-1}, ihren aus $\vartheta_{n-1} = a_{n-1}$ sich ergebenden Werth einsetzt, über in einen anderen Ω'' mit nicht mehr als $2n - 2$ Variablen, etwa

$$\Omega'' = \sum_{i=1}^{2n-2} X_i'' dx_i,$$

von welchem eine äquivalente reducirte Form

$$\sum_{j=1}^{n-2} \Theta_j d\vartheta_j$$

ist, die nur $n - 2$ Differentialelemente enthält.

Fährt man in dieser Weise fort, so muss man schliesslich zu einem Ausdruck $\Omega^{(n-1)}$ mit nicht mehr als $n + 1$ Variablen gelangen, der sich auf eine Form mit nur einem einzigen Differentialelement z. B. auf die Form

$$\Psi_1 d\psi_1$$

reduciren lässt. Alsdann ist ein Integralsystem der ursprünglichen Gleichung gegeben durch

$$\varphi_n = a_n, \ \vartheta_{n-1} = a_{n-1}, \ldots, \psi_1 = a_1.$$

§ 116.

Dies ist der allgemeine Gang der Clebsch'schen Ableitung eines speciellen Integralsystems, bei welcher der erste Schritt die Herstellung der Function φ_n ist. Clebsch's Methode bestimmt φ_n als Lösung einer einzigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und die Form dieser Gleichung rechtfertigt den Schluss des § 113 bezüglich des allgemeinen functionalen Charakters von φ_n. Der $q + 1^{\text{te}}$ Schritt ist die Herstellung der Function ξ_{n-p}, welche eins der Integrale der Gleichung $\Omega^{(q)} = 0$ mit $2n - q$ Differentialelementen ist. Dieselbe wird nach der Clebsch'schen Methode bestimmt als eine

simultane Lösung von $q+1$ partiellen Differentialgleichungen, sämmtlich von der ersten Ordnung.

Es sind daher an erster Stelle zwei einander ähnliche Aufgaben zu betrachten. Bei der ersten der beiden hat ein Differentialausdruck mit $2n$ Differentialelementen zu seiner reducirten Form einen Ausdruck, welcher n Differentialelemente enthält; bei der letzteren von beiden hat ein Differentialausdruck mit $2m+r$ Differentialelementen zu seiner reducirten Form einen Ausdruck, der m Differentialelemente enthält. Hierbei ist nun die Entstehungsweise der nothwendigen Bedingungen dafür, dass eine solche Reduction möglich ist, anzugeben.

Ferner, wenn irgend eine Function φ_n für eins der Integrale von $\Omega = 0$ angenommen und mit Hülfe dieses Integrals die Anzahl der Veränderlichen in Ω um eine Einheit reducirt wird, so kann die nachfolgende Transformation von Ω zum Theil von der Form von φ_n abhängig sein; und somit können auch die folgenden Integrale von dieser Function abhängen. In der That wird jedes der Integrale im Allgemeinen die willkürlichen Constanten der anderen vorher gefundenen Integrale enthalten, so dass wir schreiben können:

$$\xi_{n-q} = \xi_{n-q}(x, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-q+1}).$$

Werden $a_n, a_{n-1}, \ldots$ durch $\varphi_n, \vartheta_{n-1}, \ldots$ ersetzt, so ist ξ_{n-q} eine Function der Variablen x allein und die Form der Function hängt im Allgemeinen ab von den Formen aller Integrale, welche vorher abgeleitet sind. Es ist daher nothwendig, als dritte Aufgabe, zu untersuchen, welche Wirkung dies auf die Form eines solchen Integrals ausübt; dasselbe wird sich bestimmen mit Hülfe der linearen partiellen Differentialgleichungen

Diese drei Aufgaben werden von Clebsch in verschiedener Weise behandelt. In seiner ersten Abhandlung*) werden die ersten beiden gelöst durch Herstellung der einzigen charakteristischen Differentialgleichung oder des Systems solcher Gleichungen, welches den beiden angegebenen Aufgaben entspricht; und für die dritte derselben wird die Transformation auf die simultanen Gleichungen, durch welche $\varphi, \vartheta, \ldots, \xi, \ldots, \psi$ als Functionen der Variablen allein bestimmt werden, durch eine ausserordentlich mühselige Rechnung bewerkstelligt. Die Gleichungen, welche irgend eine Function ξ bestimmen, hängen in ihrer Form ab von den vor ξ in analoger Weise bestimmten Functionen. In der zweiten Abhandlung von Clebsch**) werden diese Func-

*) Crelle's J. Bd. 60 (1862) S. 193—251.

**) Crelle's J. Bd. 61 (1863) S. 146—179.

tionen direct ohne explicites Dazwischentreten und vorausgängige Bestimmung der vorhergehenden Functionen erhalten. Die Discussion der dritten Aufgabe wird auf den allgemeinsten Fall einer keiner Bedingung unterworfenen Differentialgleichung zwischen einer geraden Anzahl von Variablen beschränkt; die Ausdehnung auf eine bedingte Gleichung wird nicht gegeben*).

§ 117.

Wir haben also erstens die Differentialgleichung zu suchen, welche von dem ersten der Integrale einer keiner Bedingung unterliegenden Differentialgleichung mit einer geraden Anzahl von Variablen befriedigt wird.

Wird die Gleichung in der Form genommen:

$$\Omega = \sum_{\mu=1}^{2n} X_\mu dx_\mu = 0,$$

und ist

$$\Omega = \sum_{\varrho=1}^{n} F_\mu df_\mu = 0$$

eine reducirte Form derselben, so haben wir für $i = 1, 2, \ldots, 2n$:

$$X_i = F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + F_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \cdots + F_n \frac{\partial f_n}{\partial x_i}$$

und daher:

$$a_{i,j} = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial F_r}{\partial x_j} \frac{\partial f_r}{\partial x_i} - \frac{\partial F_r}{\partial x_i} \frac{\partial f_r}{\partial x_j} \right).$$

Führt man nun die Grössen y aus § 55 ein, so ergiebt sich:

$$X_i = \sum_{j=1}^{2n} a_{i,j} y_j$$

und somit:

---

*) Ein grosser Theil dieser beiden Abhandlungen von Clebsch sowie eine andere in Crelle's J. Bd. 65 S. 257—268 ist der Theorie der partiellen Differentialgleichungen gewidmet; die Arbeiten sind daher nicht so ganz und gar auf die Theorie der Pfaff'schen Gleichung beschränkt, wie es z. B. die Entwickelungen bei der Natani'schen Methode sind, und ein grosser Theil derselben bildet eine interessante Darlegung der Eigenschaften von Systemen von partiellen Differentialgleichungen. Wegen der eigentlichen Discussion dieser Classen von Gleichungen nebst den von Mayer herrührenden Verbesserungen vgl. § 38—41 in Kapitel 2.

$$\sum_{r=1}^{n} F_r \frac{\partial f_r}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{2n} y_i \left\{ \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial F_r}{\partial x_j} \frac{\partial f_r}{\partial x_i} - \frac{\partial F_r}{\partial x_i} \frac{\partial f_r}{\partial x_j} \right) \right\}$$

und diese Gleichung gilt für $i = 1, 2, \ldots, 2n$. Wird

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{j=1}^{2n} \left(y_j \frac{\partial f_r}{\partial x_j} \right) = \vartheta_r \\ &\sum_{j=1}^{2n} \left(y_j \frac{\partial F_r}{\partial x_j} \right) - F_r = \Theta_r \end{aligned} \right\} \quad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

gesetzt, so geht das eben erhaltene Gleichungssystem über in:

$$\sum_{r=1}^{n} \left(\Theta_r \frac{\partial f_r}{\partial x_i} - \vartheta_r \frac{\partial F_r}{\partial x_i} \right) = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Dies ist somit ein System von $2n$ in den $2n$ Grössen $-\vartheta$ und Θ linearen und homogenen Gleichungen. Die Determinante ∇ des Systems ist:

$$\nabla = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n, F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_{2n})}$$

und dieselbe verschwindet nicht, da die $2n$ Grössen f und F von einander unabhängig sind. Nimmt man ferner ∇ in der Form:

$$\nabla = \frac{\partial(F_1, \ldots, F_n, -f_1, \ldots, -f_n)}{\partial(x_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_{2n})}$$

und multiplicirt man beide Werthe, so findet man:

$$\nabla^2 = \begin{vmatrix} 0, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \ldots \\ a_{2,1}, & 0, & a_{2,3}, & \ldots \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & 0, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

so dass also ∇ die Pfaff'sche Function $[1, 2, \ldots, 2n]$ ist, die als nicht verschwindend vorausgesetzt wird, da die gegebene Differentialgleichung keinen Bedingungen unterliegt.

Da die Determinante des Systems linearer homogener Gleichungen nicht Null ist, so folgt, dass jede der Variablen gleich Null ist; somit:

$$(6) \quad \begin{cases} \vartheta_r = 0 = y_1 \dfrac{\partial f_r}{\partial x_1} + y_2 \dfrac{\partial f_r}{\partial x_2} + \cdots + y_{2n} \dfrac{\partial f_r}{\partial x_{2n}} \\ \Theta_r = 0 = y_1 \dfrac{\partial F_r}{\partial x_1} + y_2 \dfrac{\partial F_r}{\partial x_2} + \cdots + y_{2n} \dfrac{\partial F_r}{\partial x_{2n}} - F_r, \end{cases}$$

welche gelten für $r = 1, 2, \ldots, n$. Und wenn an Stelle von $\sum_{\varrho=1}^{n} F_\varrho df_\varrho$ als reducirte Form $\sum_{\varrho=1}^{n} \Phi_\varrho d\varphi_\varrho$ genommen worden wäre, so würde das erstere System von n Gleichungen in analoger Weise befriedigt werden durch jede der Grössen φ. Nehmen wir also eine derselben, etwa φ_n, so muss dieselbe der Gleichung genügen:

$$(7) \qquad y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + y_{2n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2n}} = 0.$$

Von dieser Gleichung kennen wir nun bereits n Integrale, nämlich $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Aus dem zweiten System von n Gleichungen aber erhalten wir:

$$y_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{F_r}{F_n}\right) + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{F_r}{F_n}\right) + \cdots + y_{2n} \frac{\partial}{\partial x_{2n}}\left(\frac{F_r}{F_n}\right) = 0,$$

für $r = 1, 2, \ldots, n-1$, so dass $n-1$ andere Integrale der partiellen Differentialgleichungen gegeben werden durch

$$\frac{F_1}{F_n}, \quad \frac{F_2}{F_n}, \quad \ldots, \quad \frac{F_{n-1}}{F_n}.$$

Wir haben daher insgesammt $2n-1$ functional von einander unabhängige Integrale. Um die allgemeinste Lösung von (7) herzustellen, sind nur $2n-1$ functional von einander unabhängige particuläre Lösungen nothwendig und die Form dieser allgemeinsten Lösung ist eine willkürliche Function der $2n-1$ particulären Lösungen. Daher ist die allgemeine Lösung der Gleichung (7)

$$\varphi = \varphi_n\left(f_1, \ldots, f_n, \frac{F_1}{F_n}, \ldots, \frac{F_{n-1}}{F_n}\right),$$

wo φ_n irgend eine willkürliche Function bezeichnet.

Dies ist eine Bestätigung des Resultats in § 115 und somit ergiebt sich das **Resultat:** Ein erstes Integral der gegebenen Differentialgleichung wird geliefert durch irgend eine Lösung der Gleichung:

$$y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + y_{2n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2n}} = 0.$$

Hierbei ist zu bemerken: Erstens, dass jedes Integral der gegebenen Differentialgleichung dieser partiellen Differentialgleichung genügen muss, dass aber kein auf das eine ursprünglich angenommene Integral folgende Integral durch diese Gleichung vollständig bestimmt wird; — zweitens, dass wir jedes Integral des Systems

$$\frac{dx_1}{y_1} = \frac{dx_2}{y_2} = \cdots = \frac{dx_{2n}}{y_{2n}},$$

des Pfaff'schen Hülfssystems, als ein Integral der ursprünglichen Differentialgleichung nehmen können, da dieses System das Hülfssystem zur Bestimmung der vollständigen Lösung der partiellen Differentialgleichung ist; — drittens, dass, auch wenn ∇ (entgegen der anfänglichen Voraussetzung) verschwindet, dennoch, falls nicht gerade sämmtliche Pfaff'schen Functionen von der Ordnung $2n-2$ verschwinden, die obige partielle Differentialgleichung (oder das Hülfssystem) noch gültig ist für die Bestimmung eines Elementes φ (§ 62), vorausgesetzt, dass wir die Verhältnisse der verschwindenden Grössen y beibehalten*).

§ 118.

Gehen wir nunmehr zu dem Falle einer bedingten Gleichung zwischen $(p =)\ 2m + q$ Variablen über

$$\Omega = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_p dx_p = 0,$$

deren reducirte Form nur m Differentialelemente enthält z. B.

$$\Omega = F_1 df_1 + \cdots + F_m df_m,$$

so haben wir die Differentialgleichungen zu suchen, welche durch das erste der Integrale von $\Omega = 0$ befriedigt werden. Wie in dem allgemeinen vorher behandelten Falle ist dieses Integral eine willkürliche Function von $f_1, \ldots, f_m, \frac{F_1}{F_m}, \ldots, \frac{F_{m-1}}{F_m}$.

Alsdann ist:

$$X_i = \sum_{r=1}^{m} F_r \frac{\partial f_r}{\partial x_i}$$

und wie vorher:

$$a_{i,j} = \sum_{r=1}^{m} \left(\frac{\partial F_r}{\partial x_j} \frac{\partial f_r}{\partial x_i} - \frac{\partial F_r}{\partial x_i} \frac{\partial f_r}{\partial x_j} \right).$$

Es seien $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \sigma, \ldots, \varrho$ irgend $2m$ ganze Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, 2m+q$ und es mögen $q+1$ Systeme von $2m$

*) Der einzige wesentliche Unterschied zwischen diesem und dem allgemeinen Falle ist der, dass im gegenwärtigen Falle der Bruch $\frac{F_r}{F_n}$ keine Vereinfachung weiter zulässt ausser etwa der Weghebung eines constanten Factors aus Zähler und Nenner, während im allgemeinen Falle ein variabler Factor auf diese Weise fortfällt. Vgl. § 62.

Grössen y eingeführt werden, von denen das erste System definirt wird durch die $2m$ Gleichungen:

$$X_\vartheta = \sum_{i=1}^{2m} a_{\vartheta, i}\, y_i \qquad (\vartheta = \lambda, \mu, \nu, \ldots, \varrho),$$

während jedes der übrigen Systeme definirt wird durch $2m$ Gleichungen von der Form:

$$\sum_{i=1}^{2m} a_{\vartheta, i}\, y_i^{(s)} = - a_{\vartheta, 2m+s}$$

$$(\vartheta = \lambda, \mu, \nu, \ldots, \varrho)$$

$$(s = 1, 2, \ldots, q).$$

Verfährt man wie in § 117 und benutzt man das erste System der eingeführten Grössen y, so hat man:

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{m} F_r \frac{\partial f_r}{\partial x_\vartheta} &= X_\vartheta \\ &= \sum_{i=1}^{2m} a_{\vartheta, i}\, y_i \\ &= \sum_{i=1}^{2m} y_i \left\{ \sum_{r=1}^{m} \left(\frac{\partial F_r}{\partial x_i} \frac{\partial f_r}{\partial x_\vartheta} - \frac{\partial F_r}{\partial x_\vartheta} \frac{\partial f_r}{\partial x_i} \right) \right.\end{aligned}$$

für jeden der Werthe $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varrho$ von ϑ. Setzt man:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2m} \left(y_i \frac{\partial f_r}{\partial x_i} \right) &= \xi_r \\ \sum_{i=1}^{2m} \left(y_i \frac{\partial F_r}{\partial x_i} \right) - F_r &= \Xi_r\end{aligned}\right\} \quad (r = 1, 2, \ldots, m),$$

so geht das eben gefundene Gleichungssystem über in:

$$\sum_{r=1}^{m} \left(\Xi_r \frac{\partial f_r}{\partial x_\vartheta} - \xi_r \frac{\partial F_r}{\partial x_\vartheta} \right) = 0$$

für die $2m$ Werthe $\vartheta = \lambda, \mu, \nu, \ldots, \varrho$.

Dieses Gleichungssystem ist somit ein System von $2m$ in den $2m$ Variablen Ξ_r und $-\xi_r$ linearen und homogenen Gleichungen. Wie vorher ist die Determinante ∇ des Systems eine Jacobi'sche Determinante von der Form:

$$\frac{\partial (f_1, \ldots, f_m, F_1, \ldots, F_m)}{\partial (x_\lambda, x_\mu, \ldots\ldots\ldots, x_\varrho)}$$

und dieselbe verschwindet nicht, weil die $2m$ Grössen f und F von einander unabhängig sind; ihr Werth ist, wie man leicht zeigt, die Pfaff'sche Function $[\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varrho]$ von der Ordnung $2m$, welche als nicht verschwindend vorausgesetzt ist, weil m die kleinste Anzahl von Differentialelementen in einer reducirten Form von Ω ist.

Da die Determinante des Systems linearer Gleichungen nicht Null ist, so folgt, dass jede der Variablen Null ist. Daher:

$$(8)\quad \begin{cases} \xi_r = 0 = y_1 \dfrac{\partial f_r}{\partial x_1} + y_2 \dfrac{\partial f_r}{\partial x_2} + \cdots + y_{2m} \dfrac{\partial f_r}{\partial x_{2m}} \\ \Xi_r = 0 = y_1 \dfrac{\partial F_r}{\partial x_1} + y_2 \dfrac{\partial F_r}{\partial x_2} + \cdots + y_{2m} \dfrac{\partial F_r}{\partial x_{2m}} - F_r \end{cases}$$

und diese gelten für $r = 1, 2, \ldots, m$.

Aus dem zweiten System von Gleichungen erhalten wir:

$$y_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{F_r}{F_m}\right) + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{F_r}{F_m}\right) + \cdots + y_{2m} \frac{\partial}{\partial x_{2m}}\left(\frac{F_r}{F_m}\right) = 0$$

$$(r = 1, 2, \ldots, m-1)$$

und somit haben wir $2m - 1$ Lösungen der Gleichung

$$(9)\quad y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + y_{2m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m}} = 0,$$

nämlich

$$f_1, \ldots, f_m, \frac{F_1}{F_m}, \frac{F_2}{F_m}, \ldots, \frac{F_{m-1}}{F_m}.$$

Ferner kommen Ableitungen nach $x_{2m+1}, x_{2m+2}, \ldots, x_{2m+q}$ in dieser Gleichung nicht vor; somit ist die allgemeinste Lösung der Gleichung (9) eine willkürliche Function von

$$f_1, f_2, \ldots, f_m, \frac{F_1}{F_m}, \frac{F_2}{F_m}, \ldots, \frac{F_{m-1}}{F_m}, x_{2m+1}, x_{2m+2}, \ldots, x_{2m+q}.$$

Benutzen wir nun irgend ein anderes System von Hülfsgrössen y, z. B. $y_1^{(s)}, \ldots, y_{2m}^{(s)}$, so haben wir für $s = 1, 2, \ldots, q$:

$$-\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{\partial F_r}{\partial x_{2m+s}}\frac{\partial f_r}{\partial x_\vartheta} - \frac{\partial F_r}{\partial x_\vartheta}\frac{\partial f_r}{\partial x_{2m+s}}\right) = -a_{\vartheta, 2m+s}$$

$$= \sum_{i=1}^{2m} a_{\vartheta, i}\, y_i^{(s)}$$

$$= \sum_{i=1}^{2m} y_i^{(s)} \left\{\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{\partial F_r}{\partial x_i}\frac{\partial f_r}{\partial x_\vartheta} - \frac{\partial F_r}{\partial x_\vartheta}\frac{\partial f_r}{\partial x_i}\right)\right\}$$

für jeden der $2m$ Werthe $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varrho$ von ϑ. Setzt man:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2m}\left(y_i^{(s)}\frac{\partial f_r}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial f_r}{\partial x_{2m+s}}=\mathfrak{x}_r^{(s)}\\ \sum_{i=1}^{2m}\left(y_i^{(s)}\frac{\partial F_r}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial F_r}{\partial x_{2m+s}}=\Xi_r^{(s)}\end{aligned}\right\}\quad(r=1,2,\ldots,m),$$

so geht das eben gefundene Gleichungssystem über in:

$$\sum_{r=1}^{m}\left(\Xi_r^{(s)}\frac{\partial f_r}{\partial x_\vartheta}-\mathfrak{x}_r^{(s)}\frac{\partial F_r}{\partial x_\vartheta}\right)=0$$

für die $2m$ Werthe $\lambda, \mu, \nu, \ldots, \varrho$ von ϑ. Die Determinante dieses Systems von $2m$ in den $2m$ Variablen linearen und homogenen Gleichungen verschwindet nicht; somit muss jede der Veränderlichen Null sein, demnach:

$$(10)\quad\begin{cases}\mathfrak{x}_r^{(s)}=0=y_1^{(s)}\dfrac{\partial f_r}{\partial x_1}+y_2^{(s)}\dfrac{\partial f_r}{\partial x_2}+\cdots+y_{2m}^{(s)}\dfrac{\partial f_r}{\partial x_{2m}}+\dfrac{\partial f_r}{\partial x_{2m+s}}\\ \Xi_r^{(s)}=0=y_1^{(s)}\dfrac{\partial F_r}{\partial x_1}+y_2^{(s)}\dfrac{\partial F_r}{\partial x_2}+\cdots+y_{2m}^{(s)}\dfrac{\partial F_r}{\partial x_{2m}}+\dfrac{\partial F_r}{\partial x_{2m+s}}\end{cases}$$

und diese Gleichungen gelten für $r=1,2,\ldots,m$ und $s=1,2,\ldots,q$.

Hieraus erhalten wir als Lösungen der Gleichung

$$(11)\qquad y_1^{(s)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+y_2^{(s)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\cdots+y_{2m}^{(s)}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m}}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+s}}=0$$

die $2m$ Grössen $f_1, \ldots, f_m, F_1, \ldots, F_m$, und da Ableitungen in Bezug auf $x_{2m+1}, x_{2m+2}, \ldots, x_{2m+s-1}, x_{2m+s+1}, \ldots, x_{2m+q}$ in der Gleichung (11) nicht vorkommen, so ist die allgemeinste Lösung dieser Gleichung eine willkürliche Function von

$$f_1, \ldots, f_m, F_1, \ldots, F_m, x_{2m+1}, \ldots, x_{2m+s-1}, x_{2m+s+1}, \ldots, x_{2m+q}.$$

Betrachten wir nun das aus im Ganzen $q+1$ Gleichungen bestehende Aggregat von Gleichungen, welches aus den q durch (11) dargestellten Gleichungen und der einzigen Gleichung (9) gebildet wird, nämlich:

$$(12)\quad\begin{cases}A\varphi=y_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}+y_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\cdots+y_{2m}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{2m}}=0\\ A_1\varphi=y_1^{(1)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}+y_2^{(1)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\cdots+y_{2m}^{(1)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{2m}}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+1}}=0\\ A_2\varphi=y_1^{(2)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}+y_2^{(2)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\cdots+y_{2m}^{(2)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{2m}}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+2}}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ A_q\varphi=y_1^{(q)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}+y_2^{(q)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\cdots+y_{2m}^{(q)}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{2m}}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{2m+q}}=0,\end{cases}$$

so folgt unmittelbar aus dem Charakter der einzelnen allgemeinen Lösungen einer jeden der Gleichungen, dass die allgemeinste simultane Lösung des als simultanes System behandelten Gleichungssystemes (12) eine willkürliche Function von

$$f_1, f_2, \ldots, f_m, \frac{F_1}{F_m}, \frac{F_2}{F_m}, \ldots, \frac{F_{m-1}}{F_m}$$

ist.

Hätten wir, anstatt von einer Ω äquivalenten reducirten Form $\Sigma F df$ auszugehen, mit einer äquivalenten reducirten Form $\Sigma \Phi d\varphi$ begonnen, so würden die vorhergehenden Gleichungen durch die Elemente φ befriedigt worden sein und somit ist das allgemeinste Element, welches in einer zu Ω äquivalenten reducirten Form vorkommt, gegeben durch

$$\varphi_m = \varphi_m\left(f_1, f_2, \ldots, f_m, \frac{F_1}{F_m}, \frac{F_2}{F_m}, \ldots, \frac{F_{m-1}}{F_m}\right),$$

wo φ_m irgend eine willkürliche Function bezeichnet.

Dies ist seinerseits eine Bestätigung des Resultats in § 115, und es ergiebt sich, dass ein erstes Integral der keiner Bedingung unterworfenen Differentialgleichung durch irgend eine simultane Lösung des Systems (12) von simultanen Gleichungen gegeben wird.

§ 119.

Hier sind nun verschiedene Bemerkungen zu machen:

(1) Die Form der charakteristischen Gleichungen, welche die Elemente einer reducirten Form bestimmen, muss unabhängig von der Wahl der $2m$ Glieder $\lambda, \mu, \ldots, \varrho$ aus der Reihe $1, 2, \ldots, 2m + q$ sein, und somit müssen die Werthe der Coefficienten dieselben sein, wie auch diese Wahl gemacht sei. Die Bedingungen, welche nothwendig dafür sind, dass dieses stattfindet, sind die Bedingungen, unter denen die Gleichung mit $2m + q$ Variablen durch nur m Integralgleichungen befriedigt werden kann, und dieselben können ohne weitere Schwierigkeit dargestellt werden in den Formen, die bereits bei der Discussion der Natani'schen Methode angegeben wurden (§ 100). Sobald ferner diese Bedingungen explicit bekannt sind, so reichen sie aus, um die Anzahl von Gleichungen in dem Integralsystem, durch welches die gegebene Differentialgleichung befriedigt wird, anzuzeigen.

Und da in der Regel nicht sämmtliche Pfaff'sche Functionen von der Ordnung $2m$, wo m die Anzahl der Differentialelemente in einer reducirten Form ist, verschwinden, so werden wir, wenn wirklich

einige der Pfaff'schen Functionen von dieser Ordnung $2m$ verschwinden sollten, zunächst $\lambda, \mu, \ldots, \varrho$ derart wählen, dass man eine von Null verschiedene Pfaff'sche Function $[\lambda, \mu, \ldots, \varrho]$ erhält. Das erste System von Hülfsgrössen y ist dann analog dem System in § 117; jedes der übrigen Systeme wird, wie leicht zu sehen, aus Quotienten Pfaff'scher Functionen von der Ordnung $2m$, deren Nenner $[\lambda, \mu, \ldots, \varrho]$ ist, gebildet. Wenn z. B.

$$\sum_{i=1}^{6} X_i \, dx_i = 0$$

eine reducirte Form hat, welche nur zwei Differentialelemente enthält, und wenn wir

$$X_1[2,3] + X_2[3,1] + X_3[1,2] = [0,1,2,3]$$

setzen, dann sind die drei das erste Integral bestimmenden Gleichungen, wie leicht ersichtlich:

$$\left.\begin{aligned}
&[2,3,4,0]\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}+[3,4,0,1]\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}+[4,0,1,2]\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}+[0,1,2,3]\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} = 0\\
&[2,3,4,5]\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}+[3,4,5,1]\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}+[4,5,1,2]\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}+[5,1,2,3]\frac{\partial \varphi}{\partial x_4}+[1,2,3,4]\frac{\partial \varphi}{\partial x_5} = 0\\
&[2,3,4,6]\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}+[3,4,6,1]\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}+[4,6,1,2]\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}+[6,1,2,3]\frac{\partial \varphi}{\partial x_4}+[1,2,3,4]\frac{\partial \varphi}{\partial x_6} = 0
\end{aligned}\right\}.$$

2) Der Gang der allgemeinen Reduction einer Gleichung $\Omega = 0$ ist folgender: Nachdem die Function φ als simultane Lösung des Systems (12) bestimmt ist, wird dieselbe benutzt, um aus der gegebenen Gleichung eine der Variablen zu entfernen, indem man setzt:

$$\varphi = \text{const.}$$

Man erhält dann eine Differentialgleichung mit einer um eine Einheit niedrigeren Anzahl von Variablen, die durch eine um eine Einheit niedrigere Anzahl von Gleichungen integrirbar ist, d. h. man erhält die nächst einfachere Form der bereits behandelten Gleichung.

3) Jedes Integral der ursprünglichen Differentialgleichung muss dem System (12) charakteristischer simultaner partieller Differentialgleichungen genügen; indessen ist keins der auf das anfänglich angenommene Integral folgenden Integrale durch das System (12) vollständig bestimmt. In der That muss für jedes neue zu bestimmende Integral das (12) entsprechende neue charakteristische System construirt werden.

Anmerkung. Die Auflösung der Gleichungen (12) kann nach der Jacobi'schen Methode bewerkstelligt werden. Dieselben bilden

ein vollständiges System; es ist leicht zu zeigen, dass die Jacobischen Bedingungen, welche dargestellt werden können in der Form:

$$A\, A_i \varphi - A_i A\, \varphi = 0$$
$$A_j A_i \varphi - A_i A_j \varphi = 0$$

sämmtlich befriedigt sind.

Das Hülfssystem von $A\varphi = 0$ führt zu $2m - 1$ Hülfsgleichungen von der ersten Ordnung oder zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung von der Ordnung $2m - 1$. Hat man die allgemeine Form der der Gleichung $A\varphi = 0$ genügenden Function φ gefunden und wird dieselbe in $A_1\varphi = 0$ substituirt, so verwandelt sich letztere in eine neue Gleichung, zu deren unabhängigen Variablen

$$f_1, \ldots, f_m, \frac{F_1}{F_m}, \ldots, \frac{F_{m-1}}{F_m}$$

und x_{2m+1} genommen werden können, so dass also die vollständige Lösung von $A_1\varphi = 0$ abhängig gemacht werden kann von der Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung der $2m - 1^{\text{ten}}$ Ordnung. Und so fort für jede der Gleichungen in dem System (12); es kann also die vollständige Lösung jenes Systems die Integration von $q + 1$ Gleichungen, jede von der Ordnung $2m - 1$, erfordern.

Diese Methode würde also für die vollständige Bestimmung des allgemeinen Integralsystems einer keiner Bedingung unterliegenden Differentialgleichung mit $2n$ Variablen die Lösung

1) einer gewöhnlichen Differentialgleichung von der Ordnung $2n - 1$
2) zweier „ Differentialgleichungen „ „ „ $2n - 3$
3) dreier „ „ „ „ „ $2n - 5$

. . . .

n) von n „ „ „ „ „ 1

erfordern und jede dieser Lösungen giebt eins der Integrale des Integralsystems.

Die analogen Resultate für eine bedingte Gleichung lassen sich ebenfalls leicht finden.

§ 120.

Die vorhergehenden Auseinandersetzungen kann man als die erste Clebsch'sche Methode bezeichnen, angewendet entweder auf eine bedingungslose Gleichung zwischen einer geraden Anzahl von Variablen oder auf eine bedingte Gleichung. Sie erfordert die Transformation der Differentialgleichung nach der Ermittelung jedes Inte-

grals, um das System charakteristischer Gleichungen zu bilden, welches das nächstfolgende Integral bestimmt.

Um diese Arbeit etwas zu verringern, transformirt Clebsch in seiner ersten Abhandlung, wie bereits bemerkt (§ 116), diese charakteristischen Gleichungen derart, dass nur die Coefficienten der ursprünglichen Differentialgleichung und die bereits erhaltenen Integrale, nicht aber die Coefficienten der durch jedes aufeinanderfolgende Integral abgeänderten Differentialgleichung in ihnen vorkommen. In seiner zweiten Abhandlung erhält er dieselben Resultate, wie sie durch diese Transformationen erhalten werden, direct. Zu dieser directen Untersuchung, welche die zweite Methode von Clebsch genannt werden kann, gehen wir jetzt über.

§ 121.

Clebsch's zweite Methode ist nur anwendbar auf den Fall einer bedingungslosen Gleichung zwischen einer geraden Anzahl von Variablen, so dass eine reducirte Form von

$$\sum_{r=1}^{2n} X_i dx_i$$

(bei welcher keine der kritischen Bedingungen unter den Coefficienten erfüllt ist) dargestellt wird durch

$$\sum_{i=1}^{n} F_r df_r.$$

Hierin sind die $2n$ Grössen F und f von einander unabhängige Functionen der $2n$ unabhängigen Variablen x und daher sind umgekehrt die $2n$ Grössen x unabhängige Functionen der Grössen F und f, welche somit, wenn es zweckmässig erscheint, als ein vollständiges System unabhängiger Variablen betrachtet werden können.

Das Ziel der Methode ist, die charakteristischen Gleichungen aufzustellen, welche die n Grössen f bestimmen, ohne Rücksicht auf die Wirkung, welche die Benutzung der aufeinanderfolgenden Integrale auf die ursprüngliche Gleichung ausübt; und diese Gleichungen werden unmittelbar erhalten mittels des folgenden **Hülfssatzes:**

Es bezeichne P die nicht verschwindende Pfaff'sche Function $[1, 2, \ldots, n]$ und $R_{i,j}$ den Coefficienten von $a_{i,j}$ in P, so dass

$$R_{i,j} = \frac{\partial P}{\partial a_{i,j}}$$

ist und $R_{i,j}$ sich von $P_{i,j}$ (§ 59) nur durch den Factor $(-1)^{1+i-j}$ unterscheidet. Alsdann ist, wenn φ und ψ irgendwelche Functionen der Variablen x sind:

$$\sum_{r=1}^{n} F_r \frac{\partial \varphi}{\partial F_r} = (\varphi) = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \frac{R_{i,j}}{P} X_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

$$\sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial F_r} \frac{\partial \varphi}{\partial f_r} - \frac{\partial \varphi}{\partial F_r} \frac{\partial \psi}{\partial f_r} \right) = [\varphi, \psi] = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \frac{R_{i,j}}{P} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j},$$

Formeln, die sich offenbar auf die Transformation der unabhängigen Variabeln beziehen.

Wir haben wie früher:

$$a_{i,j} = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial F_r}{\partial x_j} \frac{\partial f_r}{\partial x_i} - \frac{\partial F_r}{\partial x_i} \frac{\partial f_r}{\partial x_j} \right).$$

Mit $c_{i,j}$ mag ferner die entsprechende Grösse betrachtet werden, welche man erhält, wenn man die Variablen x als Functionen von F und f betrachtet, nämlich:

$$c_{i,j} = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial x_j}{\partial F_r} \frac{\partial x_i}{\partial f_r} - \frac{\partial x_i}{\partial F_r} \frac{\partial x_j}{\partial f_r} \right).$$

Dann ist, wenn λ und μ irgend zwei der Grössen f und F bezeichnen, der Werth von

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \mu}$$

gleich 0, falls λ und μ von einander verschieden sind, und gleich 1, wenn sie einander gleich sind. Auf Grund dieser Relation kann man leicht zeigen, dass

$$\sum_{j=1}^{2n} c_{i,j} a_{s,j} \qquad (s = 1, 2, \ldots, 2n)$$

gleich Null ist, wenn i und s verschieden sind, und gleich 1, wenn i und s einander gleich sind; und daher erhalten wir durch Auflösung der $2n$ sich so ergebenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} P^2 c_{i,j} &= \text{Minor von } a_{i,j} \text{ in } P^2 \\ &= P \frac{\partial P}{\partial a_{i,j}} \end{aligned}$$

und daher:

$$c_{i,j} = \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial a_{i,j}} = \frac{R_{i,j}}{P}\ *).$$

Hiernach erhalten wir für die erste der beiden Transformationen:

$$(\varphi) = \sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n}\frac{R_{i,j}}{P}X_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n}c_{i,j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\sum_{r=1}^{n}F_r\frac{\partial f_r}{\partial x_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left\{F_r\frac{\partial f_r}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\left(\frac{\partial x_j}{\partial F_s}\frac{\partial x_i}{\partial f_s} - \frac{\partial x_i}{\partial F_s}\frac{\partial x_j}{\partial f_s}\right)\right\}.$$

Nehmen wir jetzt die beiden Glieder gesondert, so ist der typische Ausdruck des ersten:

$$F_r\frac{\partial f_r}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial f_s}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial F_s}.$$

Die Summe aller derjenigen, welche dasselbe r, s und j haben, ist:

$$F_r\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial F_s}\sum_{i=1}^{2n}\frac{\partial f_r}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial f_s}$$

und dieses ist Null, ausser wenn r und s einander gleich sind. Demnach ist die Summe

$$F_r\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial F_r}.$$

Die Summe aller dieser Glieder, welche dasselbe r haben, ist:

$$F_r\sum_{j=1}^{2n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial F_r} = F_r\frac{\partial\varphi}{\partial F_r}.$$

Demnach ist die Summe aller ersten Glieder

$$\sum_{r=1}^{n}F_r\frac{\partial\varphi}{\partial F_r}.$$

Der typische Ausdruck der zweiten Glieder in jener vierfachen Summe ist:

$$F_r\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial f_s}\frac{\partial f_r}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial F_s};$$

---

*) Dieser Satz ist gegeben von Brioschi in La teorica dei determinanti (1854) S. 60. Die Gleichungen, aus denen das Resultat erhalten wird, rühren von Cauchy her (l. c.).

die Summe aller derjenigen Glieder, welche dasselbe r, s und j haben, ist:

$$F_r \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial f_s} \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial f_r}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial F_s}$$

und dies ist stets Null. Demnach erhalten wir:

$$(\varphi) = \sum_{r=1}^{n} F_r \frac{\partial \varphi}{\partial F_r}$$

und hierdurch ist der erste der obigen Hülfssätze bewiesen.

Für den zweiten derselben hat man:

$$\begin{aligned}
[\varphi, \psi] &= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \frac{R_{i,j}}{P} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} c_{i,j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \sum_{r=1}^{n} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \left(\frac{\partial x_j}{\partial F_r} \frac{\partial x_i}{\partial f_r} - \frac{\partial x_i}{\partial F_r} \frac{\partial x_j}{\partial f_r} \right) \right\} \\
&= \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial F_r} \frac{\partial \varphi}{\partial f_r} - \frac{\partial \varphi}{\partial F_r} \frac{\partial \psi}{\partial f_r} \right),
\end{aligned}$$

wodurch der zweite der obigen Sätze bewiesen ist.

§ 122.

Nunmehr kann die Ableitung der gesuchten charakteristischen Gleichungen ausgeführt werden. In den eben bewiesenen Sätzen sind den Functionen φ und ψ keinerlei Bedingungen auferlegt; wir können daher specielle Fälle derselben erhalten, wenn wir diese Functionen φ und ψ einigen der Functionen F und f gleichsetzen.

Aus dem ersten Satze erhält man:

$$(f_i) = \sum_{r=1}^{n} F_r \frac{\partial f_i}{\partial F_r} = 0$$

$$(F_i) = F_i$$

und daher:

$$\left(\frac{F_i}{F_n}\right) = 0,$$

für alle Werthe von $i = 1, 2, \ldots, n$.

Nach dem zweiten Satze hat man:

$$[f_i, f_j] = 0$$

für alle Combinationen von i und j aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$; ebenso:

$$[F_i, F_j] = 0$$

und

$$[f_i, F_j] = 0,$$

wenn i und j verschieden sind, dagegen

$$[f_i, F_i] = 1$$

für jeden der n Werthe von i. Weiter finden wir

$$\left[\frac{F_i}{F_n}, \frac{F_j}{F_n}\right] = 0 = \left[f_i, \frac{F_j}{F_n}\right]$$

wenn i und j verschieden sind, und

$$0 = \left[f_i, \frac{F_i}{F_n}\right]$$

für jeden der n Werthe von i.

Die einzigen Gleichungen, in denen die Grössen f allein vorkommen, sind die n Gleichungen:

$$(f_i) = 0$$

und die $\frac{1}{2} n(n-1)$ Gleichungen

$$[f_i, f_j] = 0$$

und daher ergiebt sich das **Resultat:**

Die n simultanen Integrale der bedingungslosen Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{2n} X_i \, dx_i = 0$$

genügen den n partiellen Differentialgleichungen:

$$(13) \qquad (f_m) = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \frac{R_{i,j}}{P} X_i \frac{\partial f_m}{\partial x_j} = 0$$

$$(m = 1, 2, \ldots, n),$$

und den $\frac{1}{2} n(n-1)$ partiellen Differentialgleichungen:

$$(13) \qquad [f_l, f_m] = \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} \frac{R_{i,j}}{P} \frac{\partial f_l}{\partial x_i} \frac{\partial f_m}{\partial x_j} = 0$$

$$(l, m = 1, 2, \ldots, n).$$

Ferner zeigen die übrigen vorher noch abgeleiteten Relationen, dass

diese Gleichungen befriedigt werden, wenn irgend eine der Grössen f_m durch irgend eine der Grössen $\frac{F_r}{F_n}$ ersetzt wird, und daraus folgern wir in Verbindung mit der Beweisführung in § 113, dass diese Differentialgleichungen nothwendig und hinreichend sind zur Bestimmung der Functionen f.

§ 123.

Aus der Vergleichung mit § 59 ersieht man, dass

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{R_{i,j}}{P} X_i$$

gleich $-y_i$ ist, und daher ist die Gleichung $(\varphi) = 0$ die nämliche wie

$$\sum_{j=1}^{2n} y_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0$$

d. h. die nämliche wie die Gleichung (7), welche bei der ersten Methode von Clebsch vorkommt.

Ferner mag bemerkt werden (obwohl diese Bemerkung von Clebsch nicht gemacht wurde), dass der Factor $\frac{1}{P}$ aus allen den Gleichungen $(\varphi) = 0$, $[\varphi, \psi] = 0$ auch in dem Falle, wo P verschwindet, weggehoben werden kann, vorausgesetzt, dass nicht sämmtliche Pfaff'sche Functionen von der Ordnung $2n - 2$ verschwinden und keine der charakteristischen Gleichungen bei irgend einem Schritte illusorisch wird. Diese Behauptung kann durch die in § 62 bei einer analogen Frage angewendete Methode*) erwiesen werden. Hiernach ist die zweite Methode von Clebsch auf eine Gleichung mit $2n$ Variablen auch dann noch anwendbar, wenn die Pfaff'sche Function sämmtlicher Coefficienten verschwindet, vorausgesetzt dass die Pfaff'schen Functionen

---

*) Die Methode ist jedoch nicht anwendbar im Falle einer Gleichung mit einer ungeraden Anzahl von Veränderlichen; denn es kann keine Modification der Coefficienten einen Erfolg haben, da die Pfaff'sche Function ungerader Ordnung nothwendig identisch Null ist. Daher ist die gegenwärtige Form der Methode nicht anwendbar auf eine ungerade Anzahl von Variablen und eine Ausdehnung dieser Methode auf derartige Gleichungen, sowie auf bedingte Gleichungen mit einer geraden Anzahl von Variablen, ist von Clebsch nicht gegeben worden.

der nächst niedrigeren Ordnung $2n-2$ nicht sämmtlich verschwinden und keine charakteristische Gleichung bei irgend einem Schritte illusorisch wird.

§ 124.

Die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung $\Omega = 0$ hängt dann nach dieser Methode ab von der Integration eines Systems (13) von simultanen linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Um das erste Glied des die gesuchte Lösung bildenden Integralsystems, z. B. f_1, zu erhalten, nehmen wir irgend ein Integral der Gleichung

$$(\varphi) = 0$$

oder des zugehörigen Hülfssystems.

Um das zweite Glied der Lösung, z. B. f_2, zu bestimmen, nehmen wir ein gemeinschaftliches von f_1 verschiedenes Integral der beiden Gleichungen

$$(\varphi) = 0, \qquad [f_1, \varphi] = 0.$$

Um das dritte Glied der Lösung, z. B. f_3, zu bestimmen, nehmen wir ein gemeinschaftliches von f_1 und f_2 verschiedenes und durch letztere nicht darstellbares Integral der drei Gleichungen:

$$(\varphi) = 0, \quad [f_1, \varphi] = 0, \quad [f_2, \varphi] = 0$$

und so weiter.

Es ist ersichtlich, dass jedes der so erhaltenen Glieder eine Function der Variablen allein ist, dass ferner die Form jedes Gliedes abhängt von allen vorher erhaltenen Gliedern des gesuchten Integralsystems, und dass die Art und Weise, in welcher die Wirkung dieser vorher erhaltenen Glieder zu Tage tritt, durch die Form des bestimmenden Systems von simultanen Gleichungen angezeigt wird. Hierdurch sind die zweite und dritte Aufgabe des § 116 gelöst.

§ 125.

Die Lösung des Systems simultaner partieller Differentialgleichungen, durch welches jedes Glied des Integralsystems bestimmt wird, kann nach der Mayer'schen Theorie solcher Gleichungssysteme*) geschehen. Wir wollen hier nicht in die Einzelheiten einer solchen Lösung eintreten, da die bezüglichen Entwickelungen weniger zur Theorie der Pfaff'schen Gleichung als zur Theorie partieller Differentialgleichungen gehören. Es dürfte jedoch zweckmässig sein, hier

*) Vergl. Anmerk. zu § 116, S. 220.

zwei auf die vorliegenden Systeme bezügliche Resultate anzuführen, deren Beweis nicht schwierig ist.

Erstens: Welches auch die Werthe von irgend drei Functionen φ, ψ, χ der Variablen sein mögen, die Relationen

$$\big[[\varphi, \psi], \chi\big] + \big[[\psi, \chi], \varphi\big] + \big[[\chi, \varphi], \psi\big] = 0$$

und

$$[(\varphi), \psi] + [\varphi, (\psi)] + [\psi, \varphi] = ([\varphi, \psi])$$

sind stets identisch erfüllt. Den einfachsten Beweis für diese Formeln erhält man, wenn man sämmtliche Grössen als Functionen von F und f betrachtet. Nun muss man bei der Bestimmung jedes der Glieder des Integralsystems in jedem Falle mit einer functional neuen Lösung der Gleichung $(\varphi) = 0$ beginnen, und für diesen Zweck sind die folgenden Resultate, welche sich aus den vorstehenden identischen Relationen leicht herleiten lassen, vortheilhaft.

1) Wenn φ und ψ zwei functional von einander verschiedene Lösungen von $(\varphi) = 0$ sind, dann sind

$$\frac{[[\varphi, \psi], \varphi]}{[\varphi, \psi]^2} \quad \text{und} \quad \frac{[[\varphi, \psi], \psi]}{[\varphi, \psi]^2}$$

zwei andere Lösungen. Dieselben können indessen auch illusorisch oder durch φ und ψ ausdrückbar sein.

2) Wenn φ, ψ, χ drei functional von einander verschiedene Lösungen von $(\varphi) = 0$ sind, so ist jede der Grössen

$$\frac{[\varphi, \psi]}{[\psi, \chi]}, \quad \frac{[\psi, \chi]}{[\chi, \varphi]}, \quad \frac{[\chi, \varphi]}{[\varphi, \psi]}$$

ebenfalls eine Lösung, so dass also, falls sie nicht illusorisch oder als Functionen von φ, ψ, χ darstellbar sind, dadurch drei weitere Lösungen gegeben sind.

3) Wenn in der Gleichung $[\varphi, f] = 0$ φ die unbekannte Grösse ist und f als bekannt vorausgesetzt wird, so ist aus zwei Lösungen ψ und χ eine dritte ausdrückbar in der Form

$$[\psi, \chi],$$

falls dieselbe nicht illusorisch oder von ψ und χ functional abhängig ist.

Zweitens: Das System simultaner Gleichungen, welches f_i bestimmt, ist:

$$(\varphi) = 0, \quad [f_1, \varphi] = 0, \quad [f_2, \varphi] = 0, \ldots, \quad [f_{i-1}, \varphi] = 0.$$

Clebsch ersetzt diese Gleichungen durch eine lineare Combination derselben, welche ein äquivalentes System bildet und wie folgt construirt ist. Nach Einführung eines Systems von Functionen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_i$ werden die Gleichungen gebildet:

$$(\varphi) = (\Omega_1)(\varphi)_1 + (\Omega_2)(\varphi)_2 + \cdots + (\Omega_i)(\varphi)_i$$

$$[f_r, \varphi] = [f_r, \Omega_1](\varphi)_1 + [f_r, \Omega_2](\varphi)_2 + \cdots + [f_r, \Omega_i](\varphi)_i,$$

wo $r = 1, 2, \ldots, i-1$ ist. Die einzige Beschränkung der Functionen Ω, welche sonst beliebig gewählt werden können, ist die, dass die Determinante auf der rechten Seite nicht verschwindet. Alsdann kann das erste System ersetzt werden durch:

$$(\varphi)_1 = 0, \quad (\varphi)_2 = 0, \ldots, (\varphi)_i = 0.$$

Das neue System genügt der Bedingung:

$$\big((\varphi)_\lambda\big)_\mu = \big((\varphi)_\mu\big)_\lambda$$

und ist daher ein vollständiges Jacobi'sches System (§ 38).

Beispiel. Zur Erläuterung der Clebsch'schen Methoden betrachten wir die Gleichung:

$$x_4 dx_1 + 2x_1 dx_2 + x_2 dx_3 + 2x_3 dx_4 = 0.$$

Es ist:

$$R_{3,4} = [1, 2] = -2, \quad R_{4,2} = [1, 3] = 0, \quad R_{2,3} = [1, 4] = 1$$

$$R_{1,2} = [3, 4] = -2, \quad R_{1,3} = [4, 2] = 0, \quad R_{1,4} = [2, 3] = -1$$

und

$$[1, 2, 3, 4] = 3,$$

so dass also die Pfaff'sche Function nicht verschwindet und aus den Gleichungen weggelassen werden kann. Die erste jener charakteristischen Gleichungen $(\varphi) = 0$ ist:

$$(\varphi) = (4x_1 + 2x_3)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - (2x_4 + x_2)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$$

$$+ (2x_1 + 4x_3)\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} - (x_4 + 2x_2)\frac{\partial\varphi}{\partial x_4} = 0.$$

Hülfsgleichungen sind:

$$\frac{dx_1}{4x_1 + 2x_3} = \frac{-dx_2}{2x_4 + x_2} = \frac{dx_3}{2x_1 + 4x_3} = \frac{-dx_4}{x_4 + 2x_2} = d\vartheta$$

und die erforderlichen drei unabhängigen besonderen Integrale werden erhalten durch die Elimination von ϑ zwischen den Gleichungen

$$x_1 + x_3 = Ae^{6\vartheta}, \qquad x_2 - x_4 = De^{\vartheta},$$

$$x_1 - x_3 = Be^{2\vartheta}, \qquad x_2 + x_4 = Ce^{-3\vartheta}.$$

Wir können daher als ein Integral von $(\varphi) = 0$ und demgemäss als erstes Integral der gegebenen Differentialgleichung nehmen:

$$f_2 = \psi = (x_2 + x_4)(x_2 - x_4)^3.$$

Clebsch's erste Methode würde nun die Elimination z. B. von x_4 und dx_4 aus der ursprünglichen Differentialgleichung mittels ihres

ersten Integrals $f_2 = a$ erfordern und dann einen integrablen Ausdruck ergeben. Anstatt diese Methode zu benutzen, nehmen wir die zweite Methode, welche für die Herleitung eines zweiten Integrals eine von ψ verschiedene simultane Lösung von

$$(\varphi) = 0, \quad [\varphi, \psi] = 0$$

erfordert. Nehmen wir die zweite Gleichung, substituiren darin für ψ seinen Werth und vereinfachen sie durch Abwerfung überflüssiger Factoren, so nimmt sie die Form an:

$$x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_4 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0.$$

Wir müssen nun eine gemeinschaftliche von ψ verschiedene Lösung dieser Gleichung und der Gleichung $(\varphi) = 0$ suchen.

Wir verfahren folgendermassen. Die Hülfsgleichungen der neuen partiellen Differentialgleichung sind:

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{0} = \frac{dx_3}{-x_4} = \frac{dx_4}{0},$$

und die drei unabhängigen Integrale hiervon sind:

$$x_2, \; x_4, \quad (u =) x_1 x_4 + x_2 x_3.$$

Demnach ist die allgemeinste Lösung der neuen Gleichung

$$\varphi = f(x_2, x_4, u),$$

wo f irgend welche functionale Verbindung bezeichnet. Wir müssen nun finden, welche Form von f der Gleichung $(\varphi) = 0$ genügt. Substituirt man, so erhält man nach geringer Reduction:

$$(\varphi) = 3u \frac{\partial f}{\partial u} - (2x_4 + x_2) \frac{\partial f}{\partial x_2} - (x_4 + 2x_2) \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0,$$

eine Gleichung, in welcher sämmtliche Coefficienten ausgedrückt sind durch x_2, x_4, u. (Dies Resultat war zu erwarten, da $(\varphi) = 0$ und $[\varphi, \psi] = 0$ den Jacobi'schen Bedingungen genügen.) Die Hülfsgleichungen für die neue Form von $(\varphi) = 0$ sind:

$$\frac{du}{-3u} = \frac{dx_2}{2x_4 + x_2} = \frac{dx_4}{x_4 + 2x_2}$$
$$= \frac{dx_2 + dx_4}{3(x_2 + x_4)} = \frac{dx_2 - dx_4}{-(x_2 - x_4)}$$

und hiervon sind zwei unabhängige Integrale:

$$u(x_2 + x_4), \quad (x_2 + x_4)(x_2 - x_4)^3.$$

Das zweite derselben ist identisch mit ψ, das, wie man erwarten durfte, zugleich eine gemeinschaftliche Lösung von $(\varphi) = 0$ und $[\varphi, \psi] = 0$ ist. Hiernach ist φ nur eine Function von $(x_2 + x_4)u$

und demnach können wir als ein System zweier Integrale der gegebenen Differentialgleichung nehmen:

$$f_1 = (x_2 + x_4)(x_1 x_4 + x_2 x_3)$$
$$f_2 = (x_2 + x_4)(x_2 - x_4)^3.$$

Die entsprechenden Werthe von F_1 und F_2 sind:

$$F_1 = \frac{1}{x_2 + x_4}$$
$$F_2 = \frac{x_1 - x_3}{(x_2 + x_4)(x_2 - x_4)^2}.$$

Nehmen wir als erstes Integral

$$g_2 = \psi = (x_1 + x_3)(x_1 - x_3)^{-3}$$

und verfahren in analoger Weise, so finden wir:

$$g_1 = (x_1 + x_3)^{-1}(x_1 x_2 + x_3 x_4)^2,$$

die zusammen also ein zweites System von Lösungen geben. Es ist, in Bestätigung von § 113, leicht zu zeigen, dass

$$\left.\begin{aligned} g_2 &= \frac{\lambda f_2 + 2 f_1}{\lambda^3 f_2{}^2} \\ g_1 &= \frac{(\lambda f_2 + f_1)^2}{\lambda f_2 + 2 f_1} \end{aligned}\right\}, \quad \text{wo } \lambda = \frac{F_2}{F_1}.$$

Nehmen wir als erstes Integral

$$h_2 = \psi = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4)^2$$

und verfahren in analoger Weise, so finden wir:

$$h_1 = (x_2 - x_4)^2 (x_1 - x_3)^{-1},$$

die zusammen noch ein anderes System von Lösungen geben; und es ist, ebenfalls in Bestätigung von § 113:

$$h_2 = \lambda f_2 + 2 f_1$$
$$h_1 \lambda = 1.$$

§ 126.

Wir gehen nun zur Betrachtung derjenigen Gleichungen über, welche durch keine der beiden vorhergehenden Methoden behandelt werden können. Ein sehr häufig vorkommender Fall ist der, dass eine bedingungslose Gleichung mit einer ungeraden Anzahl von Variablen gegeben ist, deren Pfaff'sche Function nothwendig verschwindet. Andere Fälle sind die in § 119 erwähnten Ausnahmen, bei denen sämmtliche Pfaff'schen Functionen von einer gegebenen Ordnung verschwinden, aber nicht diejenigen der nächst niedrigeren Ordnung.

Nehmen wir an, dass die Gleichung

$$\Omega = \sum_{i=1}^{p} X_i dx_i = 0$$

eine reducirte Form

$$Fdf + F_1 df_1 + \cdots + F_m df_m$$

habe und dass keine äquivalente Form mit einer geringeren Anzahl von Differentialelementen denn $m + 1$ gefunden werden könne, so ist der häufigste Fall der, dass $p = 2m + 1$ und für alle andern Fälle $p \gtreqless 2(m + 1)$ ist. Und in allen Fällen verschwindet die Pfaff'sche Function der gegebenen Differentialgleichung $\Omega = 0$.

Ist erstens $p = 2m + 1$, so giebt es $2m + 2$ Functionen f und F von nur $2m + 1$ Variablen; demnach muss zwischen diesen Functionen eine und im Falle einer bedingungslosen Gleichung nur eine Relation bestehen. Wenn aber irgend einer der Coefficienten, etwa F, eine Constante ist, die dann gleich 1 genommen werden kann, so besteht keine solche Relation zwischen den m Coefficienten $F_1, \ldots, F_m$ und den $m + 1$ Functionen $f, f_1, \ldots, f_m$ der Differentialelemente.

In allen andern Fällen verschwinden sämmtliche Pfaff'schen Functionen von der Ordnung $2m + 2$. Nun ist das Quadrat der Determinante:

$$\frac{\partial(f, f_1, \ldots, f_m, F, F_1, \ldots, F_m)}{\partial(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\tau)},$$

wo $\alpha, \beta, \ldots, \tau$ irgend welche $2m + 2$ Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ sind, das Quadrat der Pfaff'schen Function $[\alpha, \beta, \ldots, \tau]$, welche von der Ordnung $2m + 2$ ist und nach Voraussetzung verschwindet, und daher ist jede der vorstehenden Determinanten für jede Wahl von $2m + 2$ Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ gleich Null. Demnach muss eine Functionalbeziehung zwischen den Grössen

$$f, f_1, \ldots, f_m, \quad F, F_1, \ldots, F_m$$

bestehen. Nach Voraussetzung aber verschwinden nicht sämmtliche Pfaff'schen Functionen von der Ordnung $2m$ und daher können nicht sämmtliche Minoren der vorstehenden Determinante verschwinden; somit giebt es nicht zwei (oder mehr) Relationen zwischen den Grössen f und F*), d. h. es besteht nur eine einzige Functionalbeziehung.

*) Gäbe es z. B. zwei Relationen, so könnte F und f durch $f_1, \ldots, f_m$, $F_1, \ldots, F_m$ ausgedrückt werden und daher könnte die reducirte Form derart transformirt werden, dass sie nur $2m$ Variablen enthält und daher auf nur m Glieder zurückführbar wäre, was im Widerspruch mit der Voraussetzung steht.

Wenn indessen irgend einer der Coefficienten, etwa F, gleich 1 ist, so ist die Bedingung, dass die Determinante verschwinden soll, erfüllt und dann besteht keine Relation.

Daher ist in jedem Falle die reducirte Form entweder von der Gestalt:

$$\sum_{i=0}^{m} F_i df_i$$

mit einer einzigen identischen Relation unter den Grössen f und F, oder sie ist von der Gestalt:

$$df + \sum_{i=1}^{m} F_i df_i.$$

§ 127.

Hat man auf irgend welche Weise eine specielle reducirte Form gefunden, so kann dieselbe folgendermassen verallgemeinert werden. Es sei

$$Fdf + F_1 df_1 + \cdots + F_m df_m$$

eine solche Form mit einer einzigen Functionalbeziehung zwischen den Grössen, z. B.

$$F = \Psi(f, f_1, \ldots, f_m, F_1, \ldots, F_m).$$

Die andere Form wird sich im Laufe der Verallgemeinerung ergeben. Die allgemeinste reducirte Form sei

$$\Phi d\varphi + \Phi_1 d\varphi_1 + \cdots + \Phi_m d\varphi_m$$

nebst einer entsprechenden Functionalrelation. Nimmt man dann $f, f_1, \ldots, f_m, F_1, \ldots, F_m, x_{2m+2}, \ldots x_p$ als unabhängige Variablen, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} F &= \Phi \frac{\partial \varphi}{\partial f} + \Phi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial f} + \cdots + \Phi_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial f} \\ F_i &= \Phi \frac{\partial \varphi}{\partial f_i} + \Phi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_i} + \cdots + \Phi_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial f_i} \\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \Phi \frac{\partial \varphi}{\partial F_r} + \Phi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial F_r} + \cdots + \Phi_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial F_r} \\ &\qquad (r = 1, 2, \ldots, m) \\ 0 &= \Phi \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} + \Phi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s} + \cdots + \Phi_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_s} \\ &\qquad (s = 2m+2, \ldots, p). \end{aligned}\right\}.$$

Eliminirt man aus dem letzten System von $m + (p - 2m - 1)$ Gleichungen die Verhältnisse $\Phi : \Phi_1 : \cdots : \Phi_m$, so erhält man eine Anzahl verschwindender Jacobi'scher Determinanten, aus denen folgt, dass eine Functionalbeziehung

$$\Pi(f, f_1, \ldots, f_m, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) = 0$$

existirt, wobei Π eine völlig willkürliche Function ist. Dann folgt, wie in § 113:

$$\Phi = \lambda \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}, \quad \Phi_1 = \lambda \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}, \ldots, \quad \Phi_m = \lambda \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_m}$$

$$F = -\lambda \frac{\partial \Pi}{\partial f}, \quad F_1 = -\lambda \frac{\partial \Pi}{\partial f_1}, \ldots, \quad F_m = -\lambda \frac{\partial \Pi}{\partial f_m}.$$

Werden diese nach den Grössen $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$, den Elementen der verallgemeinerten Lösung, aufgelöst, so sieht man, dass jedes dieser Elemente eine Function der Grössen f und F ist, und analog in Bezug auf die Coefficienten Φ. Da Π willkürlich ist, so ist jede dieser Functionen willkürlich, indessen ist die Form aller dieser willkürlichen Functionen durch diejenige von Π bestimmt und dieselben sind nicht von einander unabhängig. Die Form irgend einer von ihnen kann willkürlich angenommen werden — wodurch dann umgekehrt die Form von Π bestimmt ist — und alsdann sind die Formen aller andern mitbestimmt.

Dies ist die Verallgemeinerung der angenommenen Form; da sie die allgemeinste Form ist, so schliesst sie nothwendig die einfachste als speciellen Fall ein. Da, wie eben dargelegt wurde, eine der Functionen willkürlich angenommen werden kann und die übrigen alsdann bestimmt sind, so nimmt Clebsch zur Definition der einfachsten reducirten Form an, dass der Coefficient eines der Differentialelemente gleich 1 sein soll. Daher ist die reducirte Normalform:

$$df + F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_m df_m,$$

wo nun zwischen den Grössen f und F keine Relation mehr besteht. Wenn eine solche specielle reducirte Form gefunden ist, so ist die natürliche Verallgemeinerung auf eine andere reducirte Normalform:

$$d\varphi + \Phi_1 d\varphi_1 + \Phi_2 d\varphi_2 + \cdots + \Phi_m d\varphi_m,$$

welches die allgemeinst mögliche ist.

Die vorhergehende Untersuchung ist auf diesen Fall anwendbar, so dass wir an erster Stelle eine willkürliche Functionalbeziehung

$$\Pi(f, f_1, \ldots, f_m, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) = 0$$

zwischen den Elementen der beiden Lösungen haben. Da indessen F und Φ beide gleich 1 sind, so ist:

$$\lambda \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 1 = -\lambda \frac{\partial \Pi}{\partial f}$$

und daher:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Pi}{\partial f} = 0,$$

so dass f und φ in Π nur in der Verbindung $\varphi - f$ vorkommen können. Setzt man:

$$\varphi - f = \vartheta,$$

so ist die willkürliche Functionalbeziehung zwischen den Elementen der beiden Lösungen:

$$\Pi(f_1, \ldots, f_m, \vartheta, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) = 0$$

und wenn λ der reciproke Werth von $\frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta}$ ist, so hat man:

$$\Phi_r = \quad \lambda \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

$$F_i = -\lambda \frac{\partial \Pi}{\partial f_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Diese Gleichungen enthalten die normale Verallgemeinerung irgend einer besonderen reducirten Normalform.

§ 128.

Werden diese Gleichungen aufgelöst, so geben sie jede der Grössen $\vartheta, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ als Function von $f_1, \ldots, f_m, F_1, \ldots, F_m$. Die Formen dieser Functionen sind abhängig von der Form von Π und daher ist jede Function willkürlich aber nicht unabhängig von den andern. Betrachten wir daher nur eins der Elemente der verallgemeinerten Lösung mit der Absicht, dasselbe als Integral zu nehmen, so folgt, dass das allgemeinste erste Integral einer Differentialgleichung mit einer reducirten Form

$$df + F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_m df_m$$

gegeben wird durch

$$\varphi_m = \varphi_m(f_1, \ldots, f_m, F_1, \ldots, F_m),$$

wo φ_m eine willkürliche Function ist.

Der allgemeine Gang der Ableitung der aufeinanderfolgenden Integrale ist ähnlich dem in dem früheren Falle (§ 115). Mit Hülfe des Integrals $\varphi_m = a_m$ kann die Differentialgleichung in eine Glei-

chung mit nur $p - 1$ Variablen transformirt werden, welche eine reducirte Normalform

$$d\varphi + \Phi_1 d\varphi_1 + \cdots + \Phi_{m-1} d\varphi_{m-1}$$

besitzt. Da die neuen Coefficienten der Differentialgleichung in ihrer Form von der angenommenen Form der Function φ_m abhängen (oder anders, da die übrigen Functionen $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ von der Form von φ_m abhängen), so folgt, dass die übrigen Integrale in ihrer Form in analoger Weise beeinflusst werden. Somit hat wie im früheren Falle jedes Integral Einfluss auf die Form aller nachfolgend bestimmten Integrale.

Die neue Gleichung mit der zugehörigen neuen reducirten Form ist nach der bereits discutirten Gleichung in Bezug auf die Behandlung die nächst einfachere; wir erhalten ein zweites Integral der gegebenen Differentialgleichung in der Form:

$$\psi_{m-1} = \psi_{m-1}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}, \Phi_1, \ldots, \Phi_{m-1}),$$

wo ψ_{m-1} eine willkürliche Function ist. Alsdann lässt sich mit Hülfe des Integrals $\psi_{m-1} = a_{m-1}$ die Differentialgleichung in eine andere mit nur $p - 2$ Variablen transformiren, von welcher

$$d\psi + \Psi_1 d\psi_1 + \Psi_2 d\psi_2 + \cdots + \Psi_{m-2} d\psi_{m-2}$$

eine reducirte Normalform ist. Und so geht es weiter, bis man eine Differentialgleichung mit $p - m$ Variablen erhält, welche

$$d\chi$$

zur reducirten Normalform hat, d. h. bis man eine Gleichung erhält, die exact ist. Alsdann bilden

$$\varphi_m = a_m, \quad \psi_{m-1} = a_{m-1}, \ldots, \chi = a_0$$

ein der Differentialgleichung äquivalentes Integralsystem.

§ 129.

Nachdem wir auf diese Weise irgend eine specielle Lösung verallgemeinert haben, bleiben noch die Gleichungen zu ermitteln, durch welche die Integrale bestimmt werden. Für diesen Zweck giebt Clebsch zwei Methoden, deren jede auf die Bestimmung eines ersten Integrals der Differentialgleichung ausgeht. Da mit Hülfe dieses ersten Integrals die Differentialgleichung in eine andere, welche einfacher ist und in analoger Weise behandelt wird, transformirt wird, so folgt, dass jede dieser Methoden in derselben Weise beschränkt ist, wie die erste Methode, welche auf die Classe der bedingungslosen

Gleichungen mit einer geraden Anzahl von Variablen Anwendung findet; keine der Methoden besitzt die Allgemeinheit der zweiten auf diese Art von Gleichungen anwendbaren Methode.

§ 130.

Die erste Methode gestaltet sich folgendermassen. Da

$$\sum_{i=1}^{p} X_i dx_i = df + \sum_{r=1}^{m} F_r df_r,$$

so hat man:

$$X_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{r=1}^{m} F_r \frac{\partial f_r}{\partial x_i}$$

und daher:

$$a_{i,j} = \sum_{r=1}^{m} \left(\frac{\partial F_r}{\partial x_j} \frac{\partial f_r}{\partial x_i} - \frac{\partial F_r}{\partial x_i} \frac{\partial f_r}{\partial x_j} \right),$$

welches die nämliche Form wie vorher in § 118 ist und somit ein analoges Verfahren an die Hand giebt.

Es seien $\lambda, \mu, \ldots, \varrho$ irgend $2m$ Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$, ferner $p = 2m + q$ und s irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots, q$. Alsdann bestimmen wir q Systeme von Grössen $y_1^{(s)}, y_2^{(s)}, \ldots, y_{2m}^{(s)}$ durch die Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{2m} a_{\vartheta, i} y_i^{(s)} = - a_{\vartheta, 2m+s}$$

$$(\vartheta = \lambda, \mu, \ldots, \varrho).$$

Verfährt man wie in § 118, so erhält man die — zu System (10) jenes Paragraphen analogen — Gleichungen:

$$y_1^{(s)} \frac{\partial f_r}{\partial x_1} + y_2^{(s)} \frac{\partial f_r}{\partial x_2} + \cdots + y_{2m}^{(s)} \frac{\partial f_r}{\partial x_{2m}} + \frac{\partial f_r}{\partial x_{2m+s}} = 0$$

$$y_1^{(s)} \frac{\partial F_r}{\partial x_1} + y_2^{(s)} \frac{\partial F_r}{\partial x_2} + \cdots + y_{2m}^{(s)} \frac{\partial F_r}{\partial x_{2m}} + \frac{\partial F_r}{\partial x_{2m+s}} = 0,$$

welche gelten für $r = 1, 2, \ldots, m$ und $s = 1, 2, \ldots, q$.

Nun haben wir gesehen, dass das erste Integral der Differentialgleichung eine Function von $f_1, \ldots, f_m, F_1, \ldots, F_m$ ist; sie genügt daher der Gleichung

$$A_s \varphi = y_1^{(s)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + y_2^{(s)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \cdots + y_{2m}^{(s)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m}} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m+s}} = 0,$$

da jedes ihrer Elemente der Gleichung genügt. Diese Gleichung gilt für $s = 1, 2, \ldots, q$ und somit hat man das Resultat:

Das erste Integral φ der Differentialgleichung $\Omega = 0$ wird bestimmt als die allgemeinste simultane Lösung des Systems linearer partieller Differentialgleichungen

$$A_1\varphi = 0, \quad A_2\varphi = 0, \ldots, \quad A_q\varphi = 0.$$

Jede der Grössen y ist der Quotient einer Pfaff'schen Function von der Ordnung $2m$ durch die Pfaff'sche Function $[\lambda, \mu, \ldots, \varrho]$, und da nach der anfangs gemachten Voraussetzung nicht alle Functionen von der Ordnung $2m$ verschwinden, so werden wir natürlich $\lambda, \mu, \ldots, \varrho$ so wählen, dass sich eine nicht verschwindende Pfaff'sche Function ergiebt.

Es ist leicht zu verificiren, dass das System von q Gleichungen sämmtlichen Jacobi'schen Bedingungen für die Existenz gemeinschaftlicher Lösungen genügt und dass es somit ein vollständiges System bildet.

Beispiel 1. Der einfachste Fall ist der, in welchem die Anzahl der charakteristischen Gleichungen am geringsten, nämlich $q = 1$ ist, und die einzige zur Bestimmung des ersten Integrals dienende Gleichung ist dann:

$$\sum_{s=1}^{2m+1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_s}[s+1, s+2, \ldots, 2m+1, 1, \ldots, s-1] = 0.$$

Als sehr leichtes Beispiel betrachten wir die Gleichung:

$$\Omega = x_2 dx_1 + x_3 dx_2 + x_1 dx_3 = 0.$$

Die charakteristische Gleichung ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0$$

und daher kann man als specielle Lösung nehmen:

$$f_1 = x_1 - x_2 = a.$$

Benutzt man dieses Integral, um x_1 und dx_1 fortzuschaffen, so hat man:

$$\Omega' = x_2 dx_2 + x_3 dx_2 + (a + x_2) dx_3$$
$$= d\left(\frac{1}{2}x_2^2 + x_2 x_3 + a x_3\right),$$

also:

$$f = \frac{1}{2} x_2^2 + x_2 x_3 + a x_3.$$

Somit ist ein specielles System von Integralen:

$$f = \frac{1}{2} x_2^2 + x_1 x_3 = c$$

$$f_1 = x_1 - x_2 = b.$$

Da ferner

$$\Omega = df + F_1 df_1,$$

so findet man:

$$F_1 = x_2 - x_3.$$

Um das Integralsystem zu verallgemeinern, nehmen wir:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \text{Function } (f_1, F_1) \\ &= \text{Function } (x_1 - x_2, x_2 - x_3) = \text{const.} \end{aligned}$$

und dies kann geschrieben werden in der Form:

$$x_1 - x_2 = \psi(x_2 - x_3, a),$$

wo ψ eine willkürliche Function ist. Benutzt man dies, um die Gleichung wie zuvor zu transformiren, so hat man:

$$\begin{aligned} \Omega' &= x_2 dx_2 + x_2 \psi' dx_2 - x_2 \psi' dx_3 + x_3 dx_2 + x_2 dx_3 + \psi dx_3 \\ &= d\left(\frac{1}{2} x_2^2 + x_2 x_3 + x_3 \psi\right) + (x_2 - x_3) d\psi, \end{aligned}$$

so dass man, wenn man $x_2 - x_3 = z$ setzt, erhält:

$$f = \frac{1}{2} x_2^2 + x_2 x_3 + \int z \psi'(z, a) dz,$$

wo nach der Integration z durch seinen Werth $x_2 - x_3$ zu ersetzen ist. Daher sind die beiden Integrale des verallgemeinerten Systems:

$$\varphi = \frac{1}{2} x_2^2 + x_2 x_3 + \int z \psi'(z, a) dz = c$$

$$x_1 - x_2 = \psi(x_2 - x_3, a).$$

Beispiel 2. Ein anderes einfaches Beispiel bietet die analoge Gleichung:

$$x_2 dx_1 + x_3 dx_2 + x_4 dx_3 + x_5 dx_4 + x_1 dx_5 = 0.$$

Beispiel 3. Es ist eine unmittelbare Folgerung aus der ersten Methode von Clebsch, dass, wenn z und dz aus dem nicht integrablen Ausdruck

$$\Omega = X dx + Y dy + Z dz$$

mit Hülfe irgend eines Integrals, z. B. $\varphi(x, y, z, a) = 0$, der charakteristischen Gleichung

$$[2, 3] \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + [3, 1] \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + [1, 2] \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0$$

eliminirt werden, alsdann die neue Form Ω' (d. h. das transformirte Ω) ein vollkommenes Differential ist. Dies Resultat lässt sich

mit der Bertrand'schen Methode für eine exacte Gleichung (§ 16) und mit dem Theorem von Jacobi in dem Beispiel des § 68 in Parallele stellen.

Beispiel 4. Die Gleichung

$$(x_2^2 - x_3 x_1 + a)dx_1 + (x_3^2 - x_1 x_2 + b)dx_2 + (x_1^2 - x_2 x_3 + c)dx_3 = 0$$

bietet in der folgenden Auflösung eine gewisse Abänderung in dem rein analytischen Verfahren.

Man hat:

$$[1, 2] = 3x_2, \quad [2, 3] = 3x_3, \quad [3, 1] = 3x_1;$$

daher ist die Gleichung unter der Annahme, dass a, b, c nicht sämmtlich verschwinden, nicht exact. Die charakteristische Gleichung für das erste Integral nach der ersten Methode von Clebsch ist daher:

$$x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0.$$

Die Hülfsgleichungen für ihre Auflösung sind:

$$\frac{dx_1}{x_3} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dx_3}{x_2}$$

und zwei unabhängige Integrale dieser erhält man leicht in der Form

$$f = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^\omega}{x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3}$$

$$\psi = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^{\omega^2}}{x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3},$$

wo ω eine cubische Wurzel der Einheit ist. Somit ist

$$u = \frac{1}{f\psi} = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1 x_2 x_3$$

ein anderes Integral, und obwohl weder die Benutzung von f noch die von ψ einfach ist, so kann man doch u als ein specielles erstes Integral betrachten, mittels dessen die gegebene Differentialgleichung transformirt werden kann.

Anstatt in dieser Weise der allgemeinen Regel zu folgen, verfahren wir etwas anders. Es ist nicht schwer zu beweisen, dass

$$\frac{df}{f} + \omega \frac{d\psi}{\psi} = \frac{-3\omega^2}{u} \{(x_2^2 - x_3 x_1)dx_1 + (x_3^2 - x_1 x_2)dx_2 + (x_1^2 - x_2 x_3)dx_3\}$$

ist. Demnach hat man, wenn man

$$\vartheta = ax_1 + bx_2 + cx_3$$

setzt:

$$\Omega = d\vartheta - \frac{\omega}{3f\psi} d\{\log(f\psi^\omega)\}$$

und die speciellen und allgemeinen Integrale können nun in gewöhnlicher Weise gefunden werden.

Beispiel 5. Man integrire die Gleichung:

$$x_2^2 dx_1 + x_3^2 dx_2 + x_1^2 dx_3 = 0.$$

Beispiel 6. Es ist leicht, das Resultat, welches in der Form ein wenig allgemeiner als das in Beispiel 3 angegebene ist, zu erhalten, nämlich dass, wenn α und β zwei unabhängige Integrale des Systems

$$\frac{dx_3}{[1, 2]} = \frac{dx_1}{[2, 3]} = \frac{dx_2}{[3, 1]}$$

sind, alsdann der Ausdruck $X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3$ gleich

$$d\gamma + M d\alpha + N d\beta$$

ist, wo M und N Functionen von α und β allein sind und γ nicht durch α und β bestimmt ist*). Ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt, so ist γ eine Constante und dann hat man wieder das Theorem von Bertrand.

§ 131.

Die zweite von Clebsch angegebene Methode geht folgendermassen vor. Das Princip beruht darauf, dass, wenn eine reducirte Normalform

$$df + \sum_{i=1}^{m} F_i df_i$$

mittels einer Relation

$$f_m = \text{Function}\ (f, f_1, \ldots, f_{m-1}, F_1, \ldots, F_m),$$

die, wie zu beachten ist, f enthält, transformirt wird, dieselbe in eine Form mit $2m$ unabhängigen Grössen $f, f_1, \ldots, f_{m-1}, F_1, \ldots, F_m$, die an keine Relation gebunden sind, übergeht. Der neue Differentialausdruck hat daher eine reducirte Form von der Gestalt:

$$\sum_{i=1}^{m} F_i' df_i',$$

wo die Grössen f' und F' durch keine Relationen verbunden sind; derselbe gehört daher zur Classe der bereits behandelten Gleichungen (§ 117 und 118). Wir haben somit irgend eine Function φ der

*) Darboux „Sur le problème de Pfaff“, Bull. des Sc. Math., 2. Série, Bd. VI S. 24.

Grössen $f, f_1, \ldots, f_m, F_1, \ldots, F_m$ zu suchen, welche ein Integral der Gleichung ist; alsdann schaffen wir mittels der Gleichung $\varphi = a$ eine der Variablen fort und erhalten eine neue Gleichung, welche, wie wir gesehen haben, auf die früheren Methoden zurückführbar ist.

Zu diesem Zwecke benutzen wir wieder den ersten der in § 121 bewiesenen Sätze in der folgenden Form. Betrachtet man $2m+2$ Variablen $x_1, \ldots, x_{2m+2}$ und $2m+2$ Functionen

$$f_0, f_1, \ldots, f_m, F_0, F_1, \ldots, F_m$$

von solcher Beschaffenheit, dass

$$\sum_{i=1}^{2m+2} X_i dx_i = \sum_{i=0}^{m} F_i df_i$$

ist, dann hat die Jacobi'sche Determinante

$$\frac{\partial(f_0, f_1, \ldots, f_m, F_0, F_1, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots x_{2m})}$$

zu ihrem Werthe die Pfaff'sche Function:

$$P = [1, 2, \ldots, 2m+2].$$

Nach dem ersten der Sätze des § 121 hat man:

$$\sum_{h=1}^{2m+2} \sum_{k=1}^{2m+2} \frac{R_{h,k}}{P} X_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} = -\sum_{s=0}^{m} F_s \frac{\partial \varphi}{\partial F_s},$$

wo φ irgend eine Function der $2m+2$ Veränderlichen ist. Nach den gewöhnlichen Formeln für die Jacobi'schen Determinanten aber ist:

$$\begin{aligned} P \frac{\partial \varphi}{\partial F_s} &= \frac{\partial(f_0, f_1, \ldots, f_m, F_0, F_1, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{2m+2})} \frac{\partial \varphi}{\partial F_s} \\ &= \frac{\partial(f_0, f_1, \ldots, f_m, F_0, F_1, \ldots, F_{s-1}, \varphi, F_{s+1}, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{2m+2})} \end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned} &\sum_{h=1}^{2m+2} \sum_{k=1}^{2m+2} R_{h,k} X_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} \\ &= -\sum_{s=0}^{m} F_s \frac{\partial(f_0, f_1, \ldots, f_m, F_0, F_1, \ldots, F_{s-1}, \varphi, F_{s+1}, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{2m+2})}. \end{aligned}$$

Um dieses allgemeine Resultat auf den in Betracht stehenden Fall der Normalform anzuwenden, bemerken wir, dass F_0 gleich 1

ist und dass daher jedes Glied auf der rechten Seite verschwindet mit Ausnahme desjenigen, in welchem φ an Stelle von F_0 steht; demnach haben wir, was immer φ für eine Function der Variablen sein möge:

$$\sum_{h=1}^{2m+2} \sum_{k=1}^{2m+2} R_{h,k} X_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} = - \frac{\partial(f, f_1, \ldots, f_m, \varphi, F_1, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{2m+2})},$$

und es ist klar, dass eine ähnliche Formel mutatis mutandis gelten wird für jede Wahl von $2m+2$ Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$.

Wenn nun φ, eine Function der $2m+2$ Veränderlichen, ausgedrückt werden kann durch $f, f_1, \ldots, f_m, F_1, \ldots, F_m$ allein, so verschwindet die Jacobi'sche Determinante der $2m+2$ Functionen, und wenn φ, betrachtet als Function sämmtlicher p Variablen, darstellbar ist durch $f, f_1, \ldots, f_m, F_1, \ldots, F_m$ allein, so ist jede Jacobi'sche Determinante der $2m+2$ Functionen Null, welche in Bezug auf irgend ein aus den p Variablen gewähltes System von $2m+2$ Veränderlichen gebildet ist. Demnach genügt die gesuchte Function φ allen möglichen Differentialgleichungen von der Form:

$$\sum_{h=1}^{2m+2} \sum_{k=1}^{2m+2} R_{h,k} X_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} = 0.$$

Die gesuchte functionale Abhängigkeit der Function φ von den Grössen f und F wird hinreichend und vollständig ausgedrückt durch das Verschwinden der Jacobi'schen Determinanten der $2m+2$ Functionen, genommen in Bezug auf $x_1, x_2, \ldots, x_{2m+1}$ und jede der andern Variablen der Reihe nach. Bezeichnet dann $R_{h,k}^{(s)}$ die Ableitung von $[1, 2, \ldots, 2m+1, 2m+s]$ in Bezug auf h, k und ist

$$z_h^{(s)} = \sum_{i=1}^{2m+1} X_i R_{h,i}^{(s)} + X_{2m+s} R_{h,2m+s}^{(s)},$$

so sind die zur Bestimmung der Function φ nothwendigen und hinreichenden partiellen Differentialgleichungen:

$$A^{(s)} \varphi = \sum_{h=1}^{2m+1} z_h^{(s)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} + z_{2m+s}^{(s)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2m+s}} = 0$$

für $s = 1, 2, \ldots, p-2m-1$.

In dem speciellen Falle einer bedingungslosen Gleichung mit einer ungeraden Anzahl von Veränderlichen hat man $p = 2m+1$, so dass die vorstehende Untersuchung nicht anwendbar ist. Alsdann

ergiebt sich aber, da nur $2m + 1$ Variablen und $2m + 1$ Grössen f und F vorhanden sind, dass jede wie immer beschaffene Function φ ausgedrückt werden kann durch f und F; hiernach würde man ein erstes Integral erhalten, indem man irgend eine willkürliche Function der Variablen einer Constanten gleichsetzt und dieselbe wie im § 118 angegeben benutzt. Dies ist die vorher angenommene Theorie.

Man bestätigt leicht für den allgemeinen Fall, dass das System der $p - 2m - 1$ Gleichungen den sämmtlichen Jacobi'schen Bedingungen für den Besitz gemeinschaftlicher Lösungen genügt und dass es somit ein vollständiges System bildet.

Aufgabe. Man integrire die Gleichung

$$(2y + 2z - u)dx + (z + v)dy + (y + v)dz + (x - v)du + (u - y - z)dv = 0,$$

welche eine reducirte Normalform $d\vartheta + Fdf$ besitzt.

9. Kapitel.

Berührungstransformationen.

Bezüglich der Geschichte der Berührungstransformationen vergleiche man Lie, Math. Annal. Bd. 8 S. 219, und Mansion „Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre" (deutsch herausgegeben von H. Maser, Berlin 1892, Julius Springer, S. 41). Ausser auf die Abhandlung von Lie (welche eine Zusammenfassung verschiedener früher in Christiania veröffentlichten Abhandlungen ist) und auf diejenige von Mayer, welche beide in diesem Kapitel erwähnt werden, kann auch noch auf eine Abhandlung von Lie, Arch. for. Math. og Nat. Bd. 2 (1877) S. 10—38, und auf eine von Engel, Math. Ann. Bd. 23 S. 1—44, verwiesen werden.

Eine erschöpfende Darlegung der Theorie der Berührungstransformationen mit ihren gegenwärtigen Entwicklungen findet man in dem zweiten Bande von Lie und Engel's „Theorie der Transformationsgruppen" (Leipzig 1890, B. G. Teubner).

In einer Note Math. Annal. Bd. 8 S. 223 wirft Lie bezüglich der Berührungs- und Osculationstransformationen Fragen auf, welche bereits die Aufmerksamkeit Bäcklund's in Anspruch genommen hatten. Der letztere hatte eine Abhandlung veröffentlicht „Einiges über Curven- und Flächentransformationen" Lunds Arsskrift, Bd. 10 (1875) und seit jener Zeit hat er Abhandlungen über den Gegenstand veröffentlicht in den Math. Annal. Bd. 9 S. 297—320; ebenda Bd. 11, S. 199—241, besonders S. 200—219; ebenda Bd. 19 S. 387—422.

§ 132.

Die allgemeine Idee der Art von Transformationen, die wir jetzt betrachten wollen, entstammt gewissen fundamentalen geometrischen Vorstellungen über die Raumtransformationen. Transformationen zwischen den Punkten verschiedener Räume werden im Allgemeinen Aggregate von Punkten in Aggregate von Punkten mit ähnlichen charakteristischen

Eigenthümlichkeiten verwandeln; z. B. wird eine Fläche in der Geometrie des Raumes verwandelt in eine Fläche, zwei einander berührende Flächen werden verwandelt in zwei andere, welche sich gleichfalls gegenseitig berühren. Indessen führen Transformationen, bei denen einem Punkte wiederum ein Punkt entspricht, nicht allein zu solchen Resultaten; so bleibt z. B. die Eigenschaft der Berührung auch bestehen bei den dualistischen Transformationen, welche Reciprocität mit Bezug auf einen Kegelschnitt analytisch ausdrücken, und dies sind nur zwei Beispiele aus einer ausgedehnten Classe.

Alle Transformationen, welche durch die Eigenschaft charakterisirt sind, dass sich berührende Flächen in einem Raume in sich berührende Flächen in einem andern Raume transformirt werden, werden Berührungstransformationen genannt; dieselben sind natürlich nicht auf diejenigen analytischen Formen beschränkt, welche dem geometrischen Raume entsprechen, sondern sie finden Anwendung auf die allgemeinsten Gebilde in einer Mannigfaltigkeit von beliebig vielen Dimensionen.

Wir nehmen an, dass eine Mannigfaltigkeit von $n+1$ Dimensionen gegeben sei und dass jeder Punkt in ihr durch die (nichthomogenen) Coordinaten $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ bestimmt werde; ferner seien in derselben zwei algebraische Gebilde von je n Dimensionen gegeben, welche einander berühren. In dem gemeinschaftlichen Punkte sind die Grössen $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ für beide Gebilde dieselben und die Berührung in jenem gemeinschaftlichen Punkte findet statt, wenn die Differentialbeziehung

$$dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i = 0,$$

welche für alle Variationen in einem der Gebilde an jenem Punkte besteht, auch für alle Variationen in dem andern Gebilde in dem Punkte mit den nämlichen endlichen Elementen besteht. Es gebe nun eine Transformation, welche $z', x_1', \ldots, x_n'$ als die Coordinaten eines Punktes in einer andern Mannigfaltigkeit oder in einem andern Theile der ersten ergiebt; die beiden Gebilde, welche die Transformationen der beiden ersteren Gebilde sind, werden dann einander in einem gemeinsamen Punkte berühren, wenn die Differentialbeziehung

$$dz' - \sum_{i=1}^{n} p_i' dx_i' = 0$$

für die beiden Gebilde gleichzeitig besteht. Es ergiebt sich daher,

dass zwei sich berührende Gebilde in zwei andere sich berührende Gebilde transformirt werden, wenn das Verschwinden des Ausdrucks $dz' - \sum_{i=1}^{n} p_i' dx_i'$ eine Folge ist des Verschwindens von $dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$. Demnach muss die Transformation derart sein, dass infolge derselben diese beiden Grössen zusammen verschwinden, und daher derart, dass eine identische Relation besteht von der Form

$$dz' - \sum_{i=1}^{n} p_i' dx_i' = \varrho \left(dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i\right),$$

wo ϱ eine nichtverschwindende Integralgrösse ist. Ferner sind die Grössen $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ die Coordinaten eines Elementes eines Gebildes von der extensivsten Art; die Grössen $z, x_1, \ldots, x_n$ bestimmen seinen Ort und die Grössen $p_1, \ldots, p_n$ seine Stellung an diesem Orte; somit sind die $2n + 1$ Grössen von einander unabhängig *).

Wir kommen somit zu der Lie'schen Definition**) einer Berührungstransformation:

Sind

$$Z, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$$

$2n + 1$ von einander unabhängige Functionen der $2n + 1$ unabhängigen Grössen

$$z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$$

von solcher Beschaffenheit, dass die Differentialbeziehung

$$dZ - \sum_{i=1}^{n} P_i dX_i = \varrho \left(dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i\right)$$

(wo ϱ nicht verschwindet) identisch erfüllt ist, dann wird die durch die Gleichungen

---

*) Z. B. bestimmen z, x, y im gewöhnlichen Raume einen Punkt auf einer Fläche; p und q bestimmen die Stellung eines Elementes in jenem Punkte, so dass irgend ein Element irgend einer Fläche durch die fünf Grössen z, x, y, p, q definirt ist, und die ganze ein gegebenes Element enthaltende Fläche würde durch eine einzige Relation zwischen den fünf Grössen d. h. durch eine partielle Differentialgleichung definirt sein. Man kann die entsprechenden Resultate für Gebilde von weniger extensiver Art, z. B. für Curven doppelter Krümmung im gewöhnlichen Raume, leicht ableiten.

**) Math. Ann. Bd. 8 S. 220.

$$z' = Z, \quad x' = X, \quad p' = P$$

definirte Transformation eine Berührungstransformation genannt.

Zwei Arten von Berührungstransformationen, nämlich die Punkt-Punkt-Transformation und die Punkt-Ebene-Transformation (reciproke Polaren) sind bereits erwähnt; es ist von Wichtigkeit, alle Arten zu bestimmen. Das auf diese Weise sich darbietende analytische Problem besteht darin, Z, X, P als unabhängige Functionen von z, x, p in der allgemeinsten Form, durch welche die charakteristische Relation zwischen den Variationen identisch befriedigt wird, zu bestimmen.

§ 133.

Da die Grössen in den beiden in der Relation zwischen den Variationen vorkommenden Differentialausdrücken zwei Systeme von unabhängigen Grössen sind, so kann jeder der Ausdrücke als eine reducirte Normalform eines bedingungslosen Pfaff'schen Differentialausdrucks mit $2n + 1$ Variablen betrachtet werden, so dass also die Untersuchungen von Clebsch (§ 113, 127) bezüglich der Ableitung der allgemeinsten Normalform aus einer gegebenen Normalform auf die gegenwärtige Frage angewandt werden können. In der That behandelt sie Lie in dieser Weise*); er betrachtet sie als einen Specialfall des Pfaff'schen Problems und wendet die Resultate von Clebsch darauf an. Da aber einige der besonderen von Lie gezogenen Folgerungen in der Theorie der Berührungstransformationen von ihm (natürlich nicht ohne Begründung) auf die Discussion des Pfaff'schen Problems angewendet werden, so ist es (wie auch noch aus andern Gründen) vortheilhaft, eine unabhängige Begründung der Hauptresultate zu haben. Diese directe Ableitung der Fundamentalformeln der Theorie ist von Mayer bewerkstelligt worden**).

§ 134.

Wir haben also $2n + 1$ algebraisch unabhängige Grössen Z, X, P als Functionen von $2n + 1$ unabhängigen Variablen z, x, p derart zu bestimmen, dass die Gleichung

---

*) Math. Ann. Bd. 8, S. 221 u. ff.

**) Gött. Nachr. (1874) S. 317—331; reproducirt Math. Ann. Bd. 8, S. 304—312.

$$(1) \qquad dZ - \sum_{i=1}^{n} P_i dX_i = \varrho \left(dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i\right),$$

wo ϱ eine nicht verschwindende Grösse ist, identisch erfüllt ist. Da die Variablen unabhängig sind, so ist die Gleichung (1) einem System von $2n + 1$ Gleichungen äquivalent, welches gebildet wird durch

$$(2) \qquad \frac{\partial Z}{\partial z} - \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial z} = \varrho$$

$$(3) \qquad B_r = \frac{\partial Z}{\partial p_r} - \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial p_r} = 0$$

$$(4') \qquad \frac{\partial Z}{\partial x_r} - \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial x_r} = -\varrho p_r,$$

und zwar gelten die Gleichungen (3) und (4′) für $r = 1, 2, \ldots, n$. Führt man das neue Symbol $\frac{dU}{dx_r}$ ein zur Bezeichnung von

$$\frac{\partial U}{\partial x_r} + p_r \frac{\partial U}{\partial z}$$

für irgend eine Function U, so können die n Gleichungen (4′) mit Hülfe der Gleichungen (2) ersetzt werden durch die n Gleichungen

$$(4) \qquad A_r = \frac{dZ}{dx_r} - \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{dX_i}{dx_r} = 0$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n)$$

und diese Gleichungen (2), (3) und (4) reichen aus, um das Erfülltsein der Gleichung (1) zu sichern.

Die Untersuchung zerfällt in zwei Stadien: das erste ist die Aufstellung der nothwendigen die Grössen Z, X, P bestimmenden Gleichungen; das zweite besteht darin, aus diesen nothwendigen Gleichungen solche auszuwählen, welche für die Bestimmung nothwendig und hinreichend sind.

Für das erste haben wir für irgend eine Function U

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial p_r}\frac{\partial U}{\partial p_s} - \frac{\partial}{\partial p_s}\frac{\partial U}{\partial p_r} = 0 \\
&\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial p_r}\frac{dU}{dx_r} - \frac{d}{dx_r}\frac{\partial U}{\partial p_r} = \frac{\partial U}{\partial z} \\
&\frac{\partial}{\partial p_r}\frac{dU}{dx_s} - \frac{d}{dx_s}\frac{\partial U}{\partial p_r} = 0, \quad \text{für } r \gtrless s
\end{aligned}\right\} \\
&\frac{d}{dx_r}\frac{dU}{dx_s} - \frac{d}{dx_s}\frac{dU}{dx_r} = 0.
\end{aligned}$$

Ferner, wenn man $U = Z$ setzt in der ersten der vorstehenden Relationen und (3) benutzt:

$$\frac{\partial}{\partial p_r} \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial p_s} = \frac{\partial^2 Z}{\partial p_r \partial p_s}$$

$$= \frac{\partial}{\partial p_s} \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial p_r}.$$

Wird dies vereinfacht, so folgt:

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_r} \frac{\partial X_i}{\partial p_s} - \frac{\partial P_i}{\partial p_s} \frac{\partial X_i}{\partial p_r} \right) = 0.$$

Benutzt man in analoger Weise die andern Relationen in Verbindung mit den Gleichungen (3) und (4), so erhalten wir das Aggregat von Gleichungen:

$$(5) \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_r} \frac{d X_i}{d x_r} - \frac{d P_i}{d x_r} \frac{\partial X_i}{\partial p_r} \right) = \varrho \\ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_r} \frac{d X_i}{d x_s} - \frac{d P_i}{d x_s} \frac{\partial X_i}{\partial p_r} \right) = 0, \text{ für } r \gtrless s \\ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d P_i}{d x_r} \frac{d X_i}{d x_s} - \frac{d P_i}{d x_s} \frac{d X_i}{d x_r} \right) = 0. \end{cases}$$

Führt man nun ein System von $2n$ unabhängigen Grössen $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n$ und ein anderes System von $2n$ Grössen $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$, welche mit jenen durch die linearen Gleichungen

$$(6) \qquad \begin{cases} u_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d X_j}{d x_i} y_i + \frac{\partial X_j}{\partial p_i} z_i \right) \\ v_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d P_j}{d x_i} y_i + \frac{\partial P_j}{\partial p_i} z_i \right) \end{cases}$$

verbunden sind, ein, so erhält man mit Benutzung von (5) die complementären Gleichungen:

$$(7) \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \left(u_j \frac{\partial P_j}{\partial p_i} - v_j \frac{\partial X_j}{\partial p_i} \right) = \varrho\, y_i \\ \sum_{i=1}^{n} \left(u_j \frac{d P_j}{d x_i} - v_j \frac{d X_j}{d x_i} \right) = -\varrho\, z_i . \end{cases}$$

Wenn wir, anstatt (5) zu benutzen, um y und z durch u und v auszudrücken, die Gleichungen (6) nach diesen Grössen auflösen, so folgt, da die Grössen y und z unabhängig sind, dass die Grössen u und v durch keine lineare Relationen zusammenhängen, ausser wenn die Determinante R der Coefficienten auf den rechten Seiten von (6) verschwindet. Und aus (7) folgt, unter denselben Voraussetzungen, dass R (ebenfalls die Determinante der Coefficienten der linken Seiten) nur mit ϱ verschwindet, welche letztere Grösse aber nach Voraussetzung nicht verschwindet; demnach sind die Grössen u und v ein System von $2n$ unabhängigen Grössen.

Nimmt man ferner die Jacobi'sche Determinante Θ von Z, X, P mit Bezug auf z, x, p und substituirt aus (2), (3), (4′) für

$$\frac{\partial Z}{\partial z}, \ \frac{\partial Z}{\partial p}, \ \frac{\partial Z}{\partial x}$$

ihre Werthe, so findet man leicht:

$$\Theta = \varrho R,$$

so dass also Θ nicht verschwindet. Demnach sind Z, X, P functional von einander unabhängig.

Substituirt man nun die Werthe von y_i und z_i, wie sie durch die Gleichungen (7) gegeben werden, in die Gleichungen (6), so erhält man:

$$\varrho u_j = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{dX_j}{dx_i} \sum_{s=1}^{n} \left(u_s \frac{\partial P_s}{\partial p_i} - v_s \frac{\partial X_s}{\partial p_i} \right) - \frac{\partial X_j}{\partial p_i} \sum_{s=1}^{n} \left(u_s \frac{dP_s}{dx_i} - v_s \frac{dX_s}{dx_i} \right) \right\}$$

$$\varrho v_j = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{dP_j}{dx_i} \sum_{s=1}^{n} \left(u_s \frac{\partial P_s}{\partial p_i} - v_s \frac{\partial X_s}{\partial p_i} \right) - \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \sum_{s=1}^{n} \left(u_s \frac{dP_s}{dx_i} - v_s \frac{dX_s}{dx_i} \right) \right\}$$

und dieses müssen reine Identitäten sein, da keine lineare Relationen zwischen den Grössen u und v bestehen. Wendet man daher das Symbol $[F, \Phi]$ an zur Bezeichnung von

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{d\Phi}{dx_i} - \frac{dF}{dx_i} \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \right),$$

so erhält man:

$$(8) \quad \begin{cases} \varrho = [P_j, X_j] & \text{für } j = 1, 2, \ldots, n \\ 0 = [P_i, X_j] & \text{für } i \gtrless j \\ 0 = [X_i, X_j] & \text{„} \quad \text{„} \\ 0 = [P_i, P_j] & \text{„} \quad \text{„} \end{cases}$$

welches nothwendige Bedingungen sind, denen die Grössen X, P unterliegen.

Zweitens hat man für jede beliebige Function Θ von z, x, p, wenn man die Ausdrücke für A_r und B_r substituirt, die Relation:

$$(9) \qquad \sum_{r=1}^{n}\left(B_r \frac{d\Theta}{dx_r} - A_r \frac{\partial\Theta}{\partial p_r}\right) = [Z, \Theta] + \sum_{j=1}^{n} P_j[\Theta, X_j]$$

und daher infolge der Relationen (8):

$$(10) \qquad \begin{cases} \sum_{r=1}^{n}\left(B_r \frac{dX_i}{dx_r} - A_r \frac{\partial X_i}{\partial p_r}\right) = [Z, X_i] \\ \sum_{r=1}^{n}\left(B_r \frac{dP_i}{dx_r} - A_r \frac{\partial P_i}{\partial p_r}\right) = [Z, P_i] + \varrho P_i. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen (10) ist die Determinante der Coefficienten auf der linken Seite nicht Null und daher führen, wenn wir

$$\left.\begin{array}{r} [Z, X_i] = 0 \\ \varrho P_i + [Z, P_i] = 0 \end{array}\right\} \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots, n$$

nehmen, die Gleichungen (10) zu $A_r = 0$, $B_r = 0$, d. h. sie geben einzig die Gleichungen (3) und (4). Hiernach sind die Gleichungen

$$[Z, X_i] = 0, \quad [Z, P_i] = -\varrho P_i$$

ausreichend, um die Existenz der Gleichungen (3) und (4) darzuthun, welche in Verbindung mit (2) der Fundamentalrelation äquivalent sind.

Die bisher erhaltenen Resultate führen zusammen zu dem Lieschen Satze:

Damit die Relation

$$dZ - \sum_{i=1}^{n} P_i dX_i = \varrho\left(dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i\right)$$

identisch befriedigt werden könne, ist nothwendig und hinreichend, dass die Grössen Z, X, P den Gleichungen genügen

$$[Z, X_i] = 0 = [X_i, X_j] = [P_i, X_j] = [P_i, P_j]$$
$$[P_j, X_j] = \varrho, \quad [Z, P_i] = -\varrho P_i,$$

vorausgesetzt, dass Z, X, P unabhängig von einander sind; und der Werth von ϱ ist

$$\frac{\partial Z}{\partial z} - \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial z},$$

eine nicht verschwindende Grösse. Ebenso ist umgekehrt

ein nicht verschwindender Werth von ϱ ausreichend, um die functionale Unabhängigkeit der Grössen Z, X, P zu sichern.

§ 135.

Der Bedingungen im Lie'schen Theorem — jede von ihnen ist eine Differentialgleichung — sind ziemlich viele; und obwohl dieselben nothwendig und hinreichend sind, so ist doch keine Andeutung darüber gemacht, ob etwa irgend eine von ihnen, weil nicht unabhängig, überflüssig ist. Um das Resultat zu transformiren und die Anzahl der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen soweit wie möglich zu reduciren, verfährt Mayer folgendermassen.

Aus (9) ergiebt sich, indem man Θ gleich Z und gleich X_i setzt, dass

$$\sum_{r=1}^{n}\left(B_r \frac{dZ}{dx_r} - A_r \frac{\partial Z}{\partial p_r}\right) = \sum_{j=1}^{n} P_j [Z, X_j]$$

$$\sum_{r=1}^{n}\left(B_r \frac{dX_i}{dx_r} - A_r \frac{\partial X_i}{\partial p_r}\right) = [Z, X_i] + \sum_{j=1}^{n} P_j [X_i, X_j]$$

ist. Wenn es daher $n+1$ algebraisch von einander unabhängige Functionen $Z, X_1, \ldots, X_n$ giebt, welche den Gleichungen

$$[Z, X_i] = 0, \qquad [X_i, X_j] = 0$$

genügen, so giebt es offenbar $n+1$ Gleichungen, von denen n von der Form sind:

$$\sum_{r=1}^{n}\left(B_r \frac{dX_i}{dx_r} - A_r \frac{\partial X_i}{\partial p_r}\right) = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

während die übrig bleibende Gleichung ist:

$$\sum_{r=1}^{n}\left(B_r \frac{dZ}{dx_r} - A_r \frac{\partial Z}{\partial p_r}\right) = 0.$$

Die letzte kann indessen unberücksichtigt bleiben, wenn die ersten n beibehalten werden; denn multiplicirt man diese n Gleichungen mit $P_1, \ldots, P_n$ und addirt dann, so erhält man:

$$\sum_{r=1}^{n}\left\{B_r\left(\frac{dZ}{dx_r} - A_r\right) - A_r\left(\frac{\partial Z}{\partial p_r} - B_r\right)\right\} = 0,$$

woraus sofort die letzte Gleichung folgt. Wir haben daher n lineare und homogene Gleichungen in den $2n$ Grössen A und B, und wenn

n der Grössen verschwinden, so enthalten die n Gleichungen dann die andern n linear und homogen. Nun verschwinden aber die Determinanten der Coefficienten nicht sämmtlich, denn sonst müsste eine Functionalbeziehung zwischen den Grössen Z und X stattfinden; demnach können die n Gleichungen nur dadurch befriedigt werden, dass die n in ihnen vorkommenden Variablen Null sind. Hieraus folgt, dass, wenn die $n+1$ Grössen Z und X als functional unabhängige Lösungen der Gleichungen

$$[Z, X_i] = 0, \quad [X_i, X_j] = 0$$

bestimmt worden sind, alsdann n der Gleichungen (3) und (4) aus den andern n abgeleitet werden können, so dafs das System nur n unabhängigen Gleichungen äquivalent ist. Diese Gleichungen*) dienen zur Bestimmung der n Grössen $P_1, \ldots, P_n$ und der Werth von ϱ wird alsdann bestimmt durch Gleichung (2).

Dies ist die Mayer'sche Form des Lie'schen Satzes.

§ 136.

Die Anzahl der in der allgemeinen Berührungstransformation vorkommenden Grössen $\varrho, Z, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ beträgt $2n+2$ und es sind nur $2n+1$ Gleichungen zu ihrer Bestimmung, nämlich die Gleichungen (2), (3), (4), vorhanden. Demnach bleibt irgend eine der Grössen unbestimmt, und es wird, wofern nicht eine besondere, nicht in der Natur der Sache liegende Bedingung vorgeschrieben wird, ein willkürliches Element in der Lösung vorkommen.

Dies wird durch den Charakter des eben erhaltenen Resultates bestätigt, denn die Gleichungen zur Bestimmung der Grössen Z und X sind

$$[Z, X_i] = 0, \quad [X_i, X_j] = 0$$

und die erste der so bestimmten Grössen kann nach Belieben angenommen werden, die andern nachher bestimmten Grössen werden aber in ihrer Form von jener abhängen.

Beispiel. Eine wichtige Anwendung dieses Resultats ist

---

*) Es kann vorkommen, dass für irgend ein System von n Gleichungen, welches aus den $2n$ Gleichungen ausgewählt wird, infolge der Werthe von Z und X die Determinante der Coefficienten P Null ist; dies kann indessen nicht für alle solche Systeme vorkommen wegen der functionalen Unabhängigkeit von Z und X.

auf die Lösung partieller Differentialgleichungen gemacht worden*) (vgl. auch Kap. 7). Was die vorhergehende allgemeine Untersuchung angeht, so sind die Grössen $p_1, \ldots, p_n$ von einander und von den Grössen $x_1, \ldots, x_n$ algebraisch unabhängig und die charakteristische Relation

$$dZ - \sum_{i=1}^{n} P_i dX_i = \varrho\left(dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i\right)$$

ist identisch befriedigt, während eine der Grössen Z und X durch die Bedingungen nicht bestimmt wird.

Es seien nun $p_1, \ldots, p_n$ die Ableitungen von z, eine Annahme, welche die allgemeine Bedingung nicht verletzt, und eine gegebene Differentialgleichung erster Ordnung sei

$$Z = 0.$$

Wir nehmen dann Z als das willkürliche Element, von dem eben die Rede war, und bestimmen die Grössen X durch die Gleichungen

$$[Z, X_1] = 0, \ldots, [Z, X_n] = 0$$
$$[X_i, X_j] = 0,$$

welche bei der gewöhnlichen Jacobi'schen Auflösungsmethode vorkommen. Da

$$dz = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$$

und

$$dZ = 0$$

ist, so führt die charakteristische Relation zu

$$\sum_{i=1}^{n} P_i dX_i = 0.$$

Die Gleichungen

$$X_1 = a_1, X_2 = a_2, \ldots, X_n = a_n$$

geben dann in Verbindung mit $Z = 0$ nach Elimination von $p_1, \ldots, p_n$ ein vollständiges Integral von $Z = 0$, und die Gleichungen

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \ldots, P_n = 0$$

ergeben, wie Jordan bemerkt hat**), in Verbindung mit $Z = 0$ ein

*) Darboux, Bull. des Sc. Math., 2. Série Bd. 6 (1882) S. 67 für die vorliegende Form; die Anwendung rührt aber wesentlich von Lie her, Math. Annal. Bd. 8 (1875) S. 242, ferner S. 311.

**) Cours d'Analyse, Bd. 3 (1887) S. 340.

singuläres Integral. Das umfassendste allgemeine Integral wird gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} f(X_1, \ldots, X_n) = 0, \qquad Z = 0 \\ \frac{1}{P_1}\frac{\partial f}{\partial X_1} = \cdots\cdots\cdots = \frac{1}{P_n}\frac{\partial f}{\partial X_n} \end{aligned}\right\},$$

wo f eine willkürliche Function ist.

§ 137.

Die vorhergehende Theorie giebt die allgemeinste Classe von Berührungstransformationen. Es giebt nun verschiedene specielle Arten, welche von Wichtigkeit sind; insbesondere sind alle diejenigen zu nennen, welche durch diejenigen Transformationen gebildet werden, bei denen die Werthe von $X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ unabhängig von z werden. Diese können Cylinder-Berührungstransformationen genannt werden.

Nach Lie's Theorem ist:

$$\varrho = [P_i, X_i];$$

da P und X unabhängig von z sein sollen, so folgt, dass auch ϱ unabhängig von z ist, und aus Gleichung (2), welche nunmehr

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \varrho$$

lautet, folgt:

$$Z = \varrho z + \Pi,$$

wo Π unabhängig von z ist und irgend welche Function von

$$x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$$

sein kann. Aus (4') erhält man:

$$\begin{aligned} -\varrho p_r + \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial x_r} &= \frac{\partial Z}{\partial x_r} \\ &= z\frac{\partial \varrho}{\partial x_r} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_r} \end{aligned}$$

für $r = 1, \ldots, n$, und da das einzige Glied in dieser Gleichung, welches z enthält, das erste Glied auf der rechten Seite ist, so folgt:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x_r} = 0$$

für $r = 1, \ldots, n$, oder ϱ ist unabhängig von den Variabeln x. Analog folgt aus (3), welche hier

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial p_r} = \frac{\partial Z}{\partial p_r}$$
$$= z \frac{\partial \varrho}{\partial p_r} + \frac{\partial \Pi}{\partial p_r}$$

lautet, dass ϱ von den Variablen p unabhängig ist. Demnach ist ϱ eine Constante; wird ihr Werth mit A bezeichnet, dann ist die Form von Z:

$$Z = Az + \Pi,$$

wo Π eine Function von x und p allein ist*). Substituirt man diesen Werth von Z in die charakteristische Relation zwischen den Variationen, so erhält man:

$$A dz + d\Pi - \sum_{i=1}^{n} P_i dX_i = A\left(dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i\right)$$

und daher:

$$(11) \qquad d\Pi - \sum_{i=1}^{n} P_i dX_i = - A \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i,$$

in welcher Gleichung z nicht mehr vorkommt.

Die transformirten Formen der Gleichungen, durch welche Π, P, X bestimmt werden, kann man leicht erhalten. Es ist:

$$\frac{d}{dx} X = \frac{\partial X}{\partial x}, \quad \frac{d}{dx} P = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial p} Z = \frac{\partial \Pi}{\partial p},$$
$$\frac{d}{dx_r} Z = \frac{\partial \Pi}{\partial x_r} + A p_r$$

und daher erhalten wir, wenn wir

$$(F, \Phi) = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_r}\frac{\partial \Phi}{\partial x_r} - \frac{\partial F}{\partial x_r}\frac{\partial \Phi}{\partial p_r}\right)$$

setzen:

$$[X_i, X_j] = (X_i, X_j), \quad [X_i, P_j] = (X_i, P_j), \quad [P_i, P_j] = (P_i, P_j)$$
$$[Z, P_i] = (\Pi, P_i) - A \sum_{r=1}^{n} p_r \frac{\partial P_i}{\partial p_r}$$
$$[Z, X_i] = (\Pi, X_i) - A \sum_{r=1}^{n} p_r \frac{\partial X_i}{\partial p_r}$$

und somit haben wir den **Satz:**

---

*) Die Constante A kann offenbar, wenn gewünscht, in die Variablen Z und X aufgenommen werden; die Transformation würde dann sein:

$$Z - z = \Pi,$$

eine Form, welche den vorgeschlagenen Namen rechtfertigt.

Damit die Relation

$$d\Pi - \sum_{i=1}^{n} P_i dX_i = -A \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$$

wo A eine Constante und Π eine Function von $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ ist, identisch befriedigt werden kann, ist nothwendig und hinreichend, dass die Grössen Π, P, X den Gleichungen

$$(X_i, X_j) = 0 = (P_i, X_j) = (P_i, P_j)$$

$$(P_i, X_i) = A$$

$$(\Pi, P_i) = A\left(-P_i + \sum_{r=1}^{n} p_r \frac{\partial P_i}{\partial p_r}\right)$$

$$(\Pi, X_i) = A \sum_{r=1}^{n} p_r \frac{\partial X_i}{\partial p_r}$$

genügen und die Grössen X und P functional von einander unabhängig sind.

Oder wenn wir die zweite Form (§ 135) des Lie'schen allgemeinen Theorems nehmen, so haben wir für den vorliegenden Fall:

Wenn die $n+1$ Grössen Π und X als functional von einander unabhängige Lösungen der Gleichungen

$$(X_i, X_j) = 0$$

$$(\Pi, X_i) = A \sum_{r=1}^{n} p_r \frac{\partial X_i}{\partial p_r}$$

bestimmt sind, so können die Grössen P aus irgend welchen n unabhängigen Gleichungen des Systems

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - \sum_{r=1}^{n} P_r \frac{\partial X_r}{\partial x_i} = -A p_i$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_i} - \sum_{r=1}^{n} P_r \frac{\partial X_r}{\partial p_i} = 0$$

gefunden werden.

§ 138.

Beispiel 1. Einige einfache Fälle von Cylinder-Berührungstransformationen sind von Lagrange*) gegeben worden, nämlich:

*) Oeuvres complètes Bd. 4, S. 84.

$$(\alpha) \qquad Z = z - px - qy; \quad \left.\begin{matrix} X = p, & Y = q \\ P = -x, & Q = -y \end{matrix}\right\},$$

welche oft die Legendre'sche Transformation genannt wird;

$$(\beta) \qquad Z = z - qy; \quad \left.\begin{matrix} X = x, & Y = q \\ P = p, & Q = -y \end{matrix}\right\};$$

$$(\gamma) \qquad Z = z - px; \quad \left.\begin{matrix} X = p, & Y = y \\ P = -x, & Q = q \end{matrix}\right\}.$$

Dieselben werden von Lagrange benutzt, um besondere Classen von Gleichungen durch Transformation derselben in andere bekannte Gleichungen zu lösen.

Beispiel 2. Zwei wichtige Folgerungen, welche von Lie in seiner Theorie des Pfaff'schen Problems gebraucht werden, lassen sich folgendermassen aus dem Vorhergehenden ableiten:

Erstens, in Gleichung (11) sind die Grössen P und X $2n$ unabhängige Functionen der Variablen $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ und Π ist eine andere Function der nämlichen Variablen von der Beschaffenheit, dass zwischen den Grössen Π, P, X eine einzige Relation besteht. Ferner kann die Constante $-A$ in jener Gleichung in die linke Seite aufgenommen werden und daher erhalten wir den Satz:

I. Wenn zwischen $2n + 1$ Grössen $y_0, y_1, \ldots, y_n, q_1, \ldots, q_n$ eine einzige Relation besteht, so kann der Ausdruck

$$dy_0 + \sum_{i=1}^{n} q_i dy_i$$

transformirt werden in

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i.$$

(Dieses Resultat ist ein Specialfall der Pfaff'schen Reduction eines Differentialausdrucks mit einer geraden Anzahl von Veränderlichen; denn da y_0 eine Function von q und y ist, so wird der Differentialausdruck, nachdem die Substitution für y_0 ausgeführt ist, $2n$ Differentialelemente und Variabeln enthalten und der neue Differentialausdruck ist nur seine reducirte Normalform.)

Eine einfachere Form des eben erhaltenen Resultats entsteht dadurch, dass wir in Gleichung (11) $A = 1$ setzen; alsdann ist:

$$\text{(a)} \qquad d\Pi + \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i = \sum_{i=1}^{n} P_i dX_i.$$

Betrachten wir Π als eine gegebene Function von x und p, so sind die die Grössen X bestimmenden Gleichungen:

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} (\Pi, X_i) = \sum_{r=1}^{n} p_r \frac{\partial X_i}{\partial p_r} \\ (X_i, X_j) = 0 \end{cases}$$

und die Grössen P werden bestimmt wie bei der zweiten Form des Satzes in § 137.

Zweitens, eine besondere Annahme bezüglich der eben erhaltenen Gleichung (a) führt zu einer andern Reduction. Wir nehmen an, dass man

$$X_n = x_n$$

finde; wir wollen die Form von Π und die zugehörigen Beschränkungen der Grössen P und X suchen.

Für den gegebenen Werth von X_n ist:

$$0 = (X_i, X_n) = \frac{\partial X_i}{\partial p_n},$$

so dass X_i von p_n unabhängig ist. Ebenso ist für $i = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$0 = (P_i, X_n) = \frac{\partial P_i}{\partial p_n},$$

so dass $P_1, \ldots, P_{n-1}$ von p_n unabhängig sind, und ferner ist:

$$1 = (P_n, X_n) = \frac{\partial P_n}{\partial p_n},$$

daher:

$$P_n = p_n + \Theta,$$

wo Θ unabhängig von p_n ist. Schliesslich erhält man aus der Gleichung

$$(\Pi, X_n) = \sum_{r=1}^{n} p_r \frac{\partial X_n}{\partial p_r}$$

die Relation:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_n} = 0,$$

d. h. Π ist unabhängig von p_n. Die Gleichung (a) wird nun:

$$d\Pi + \sum_{i=1}^{n-1} p_i dx_i = \sum_{i=1}^{n} P_i dX_i - p_n dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} P_i dX_i + \Theta dX_n,$$

eine Gleichung, welche explicit frei ist von der Variablen p_n. Nun sind die Grössen $P_1, \ldots, P_{n-1}, \Theta, X_1, \ldots, X_n$ $2n$ Functionen von $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_{n-1}$, so dass eine Relation zwischen ihnen besteht. Demnach erhalten wir den Satz:

II. Wenn zwischen $2n$ Grössen $q_1, \ldots, q_n, y_1, \ldots, y_n$ eine einzige Relation besteht, so kann der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{n} q_i dy_i$$

transformirt werden in:

$$dx_0 + \sum_{i=1}^{n-1} p_i dx_i .$$

(Dies ist eine unabhängige Ableitung des Clebsch'schen Resultates bezüglich der reducirten Normalform (§ 127), die einem bedingten Differentialausdruck äquivalent ist.)

§ 139.

Unter den durch diese Sätze bestimmten Cylinder-Berührungstransformationen giebt es eine wichtige Classe, nämlich die sogenannten homogenen Transformationen.

Setzen wir in den von den Grössen Π, P, X befriedigten Gleichungen Π als Constante, etwa gleich B, voraus, so ist:

$$P_i = \sum_{r=1}^{n} p_r \frac{\partial P_i}{\partial p_r}$$

$$0 = \sum_{r=1}^{n} p_r \frac{\partial X_i}{\partial p_r}$$

für alle Werthe des Index i. In diesem Falle schliessen wir daher, dass die Grössen X in den Variablen p homogen und von der Ordnung 0 und die Grössen P in den Variablen p ebenfalls homogen und von der Ordnung 1 sind.

Umgekehrt, sind die Grössen X in den Variablen p homogen und von der Ordnung 0, so folgt aus den Gleichungen

$$(P_1, X_1) = (P_2, X_2) = \cdots = (P_n, X_n) = A,$$

dass die Grössen P in den Variablen p homogen und von der ersten Ordnung sind. Demnach haben wir:

$$P_i = \sum_{r=1}^{n} p_r \frac{\partial P_i}{\partial p_r},$$

$$0 = \sum_{r=1}^{n} p_r \frac{\partial X_i}{\partial p_r}$$

und daher sind die die Grösse Π bestimmenden Gleichungen:

$$(\Pi, X_i) = 0, \quad (\Pi, P_i) = 0,$$

ein System von $2n$ Gleichungen, welche von einander linear unabhängig sind. Da die Bedingungen für die Coexistenz erfüllt sind, so bilden sie ein vollständiges System. Die Anzahl der Variablen ist aber $2n$, also gleich der Anzahl der Gleichungen; demnach giebt es keine variable Lösung (die Anzahl der Lösungen ist nach § 38 gleich $2n - 2n$) d. h. die einzige Lösung ist $\Pi =$ const., z. B. $\Pi = B$.

Hieraus erhalten wir den Satz*):

Wenn $X_1, \ldots, X_n$ homogene Functionen von der Ordnung Null in den Variablen p sind, welche den Gleichungen genügen:

$$(X_i, X_j) = 0,$$

so sind die Grössen P homogene Functionen von der Ordnung Eins in den Variabeln p; der Werth von Z ist $Az + B$, wo A und B Constanten sind, und die andern zu erfüllenden Gleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} (P_i, P_j) = 0 = (X_i, P_j) \\ (P_i, X_i) = A \end{aligned}\right\}.$$

Eine solche Berührungstransformation wird homogen genannt.

Dieses Resultat schliesst sich, wie die früheren, von selbst an die Untersuchungen von Clebsch über das Pfaff'sche Problem an, denn es ist die Verallgemeinerung einer gegebenen einem bedingungslosen Differentialausdruck äquivalenten Normalform. Substituirt man den Werth von Z in die charakteristische Relation zwischen den Variationen und nimmt man die Constante A in die linke Seite auf, so nimmt dieselbe die Form an:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \, dX_i = \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i.$$

*) Lie, Math. Ann. Bd. 8, S. 238.

Die Gleichungen von Clebsch (§ 122) sind:

$$(X_i) = 0, \qquad (P_i) = P_i$$

und $[X_i, X_j] = 0$, welche letztere in seiner Bezeichnung dieselbe ist wie die obige

$$(X_i, X_j) = 0.$$

Die beiden ersten Gleichungen beweisen den homogenen Charakter der Transformation.

Da ferner $X_1, \ldots, X_n$ homogen von der Ordnung 0 in den Variabeln p sind, so kann man diese Variabeln zwischen den Grössen X eliminiren und das Resultat wird eine Gleichung von der Form sein:

$$\text{Function}\,(X_1, \ldots, X_n, x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

welche die Grundlage für die Clebsch'sche Verallgemeinerung einer gegebenen reducirten Form bildet.

§ 140.

Die charakteristischen Gleichungen einer homogenen Transformation, nämlich

$$(X_i, X_j) = 0 = (X_i, P_j) = (P_i, P_j)$$
$$(P_i, X_i) = 1,$$

unter der Annahme, dass A in die Variablen X aufgenommen sei, werden befriedigt durch $X_i = x_i$, $P_i = p_i$, eine nur identische Transformation. Wir können indessen eine Transformation erhalten, welche nur eine unendlich kleine Variation hervorbringt*), und deren Form wird sein:

$$X_i = x_i + \varepsilon \xi_i, \quad P_i = p_i + \varepsilon \pi_i,$$

wo ε, eine unendlich kleine Constante, für alle gleich genommen werden kann. Die Grössen ξ und π sind indessen nicht nothwendig unabhängig; in der That, da die Transformation unter Beibehaltung kleiner Grössen erster Ordnung angewendet wird, so müssen ξ und π derart sein, dass sie den charakteristischen Gleichungen innerhalb derselben Grenzen genügen.

Die Gleichung $(X_i, X_j) = 0$ führt zu der Bedingung

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p_j} = \frac{\partial \xi_j}{\partial p_i};$$

---

*) Solche Transformationen vom linearen oder homographischen Typus werden in der Theorie der algebraischen Formen und Arten von functionalen Invarianten häufig gebraucht, um die allen Invarianten charakteristischen partiellen Differentialgleichungen aufzustellen.

die Gleichung $(P_i, P_j) = 0$ zu der Bedingung:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \pi_j}{\partial x_i};$$

die Gleichung $(X_i, P_j) = 0$ für $i \gtrless j$ zu der Bedingung:

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial p_i} = -\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j};$$

und schliesslich die Gleichung $(P_i, X_i) = 1$ zu der Bedingung:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} = -\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}.$$

Diese Bedingungen zeigen, dass eine Function H von solcher Beschaffenheit existirt, dass

$$\xi_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\pi_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

ist, und da die Transformation homogen ist, so dass ξ homogen und von der Ordnung 0 in den Variablen p, dagegen π homogen und von der Ordnung 1 in denselben Variablen ist, so folgt, dass H, abgesehen von einer nicht zu berücksichtigenden additiven Constanten, in den Grössen p homogen und von der ersten Ordnung ist. Demnach haben wir den Satz*):

Jede Cylinder-Berührungstransformation, welche homogen und unendlich klein ist, ist von der Form:

$$\varepsilon = \frac{X_i - x_i}{\frac{\partial H}{\partial p_i}} = \frac{P_j - p_j}{-\frac{\partial H}{\partial x_j}}$$

$$(i, j = 1, \ldots, n),$$

wo H eine homogene Function erster Ordnung in den Variabeln p ist und z untransformirt bleibt.

*) Lie, Math. Ann. Bd. 8, S. 240.

10. Kapitel.

Lie's Methode.

§ 141.

Die Reduction eines Pfaff'schen Differentialausdruckes auf seine äquivalente Normalform geschieht in der Lie'schen Methode mit Hülfe der beiden in § 138 bewiesenen Sätze, welche der Bequemlichkeit wegen hier wiederholt werden mögen:

I. Wenn zwischen $2n+1$ Grössen $y_0, y_1, \ldots, y_n, q_1, \ldots, q_n$ eine einzige Relation besteht, so kann der Ausdruck

$$dy_0 + \sum_{i=1}^{n} q_i dy_i$$

transformirt werden in:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i.$$

II. Wenn zwischen $2n$ Grössen $q_1, \ldots, q_n, y_1, \ldots, y_n$ eine einzige Relation besteht, so kann der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{n} q_i dy_i$$

transformirt werden in:

$$dx_0 + \sum_{i=1}^{n-1} p_i dx_i.$$

Da die Transformation nur eine identische Aequivalenz der transformirten Ausdrücke involvirt, so sind diese Sätze noch richtig, wenn mehr als eine einzige Relation zwischen den Grössen q und y besteht; der Unterschied in dem Resultat ist nur der, dass zwischen den Grössen p und x eine entsprechende Anzahl von Relationen besteht.

Werden diese beiden Sätze in abwechselnder Reihenfolge angewandt auf einen Pfaff'schen Ausdruck:

$$\sum_{s=1}^{m} X_s dx_s,$$

wo die Coefficienten X Functionen der Variablen x von solcher Art sind, dass zwischen den Grössen $X_1, \ldots, X_m, x_1, \ldots, x_m$ Relationen bestehen, so ergiebt sich das Resultat, dass der Ausdruck schliesslich entweder die Form

$$F_1 df_1 + \cdots + F_n df_n,$$

worin $2n \overline{\leqq} m$ ist und die Grössen F und f vollständig von einander unabhängig sind, oder aber die Form

$$d\varphi_0 + \Phi_1 d\varphi_1 + \cdots + \Phi_{n-1} d\varphi_{n-1}$$

annimmt, worin $2n - 1 \overline{\leqq} m$ ist und die Grössen φ und Φ völlig von einander unabhängig sind.

§ 142.

Die erste dieser reducirten Normalformen möge von geradem Charakter heissen (da sie eine gerade Anzahl unabhängiger variabler Grössen enthält), die zweite möge von ungeradem Charakter genannt werden (da sie eine ungerade Anzahl unabhängiger variabler Grössen enthält). Dann beweist Lie das folgende Resultat, welches von Clebsch als selbstverständlich angenommen worden war:

Alle einem gegebenen Differentialausdruck äquivalenten Normalformen haben den nämlichen Charakter bei derselben Anzahl von Functionen.

Es sind drei Fälle zu betrachten.

Erstens: Es seien

$$\sum_{i=1}^{n} F_i df_i, \qquad \sum_{i=1}^{r} G_i dg_i$$

zwei zu $\sum_{i=1}^{m} X_i dx_i$ äquivalente reducirte Formen von geradem Charakter. Alsdann ist identisch:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i df_i - \sum_{i=1}^{r} G_i dg_i = 0,$$

eine Gleichung, die nur $n + r$ Differentialelemente enthält. Eine

identische Gleichung dieser Art, in welcher die Coefficienten der Differentialelemente nicht verschwinden, kann nur mittels $n + r$ Relationen zwischen den Grössen F, f, G, g befriedigt werden. Von den beiden Zahlen sei r nicht die grössere; alsdann bleiben, wenn man aus den $n + r$ Relationen die $2r$ Grössen G und g eliminirt, $n - r$ Relationen zwischen den Grössen F und f übrig. Diese Grössen sind aber unabhängig von einander, da sie in der reducirten Normalform vorkommen. Somit ist $n - r = 0$, oder die beiden einem Differentialausdruck äquivalenten Normalformen von geradem Charakter enthalten die gleiche Anzahl von Functionen*).

---

*) Die Frage nach der Anzahl von einander unabhängiger Integralgleichungen, infolge deren ein irreducibler Differentialausdruck

$$v_1 du_1 + v_2 du_2 + \cdots + v_n du_n$$

identisch verschwinden kann, ist bereits im § 69 theilweise betrachtet worden.

Jedes Glied des Integralsystems wird zu der einen oder andern der drei Classen gehören: 1) Gleichungen, welche nur die Variablen u enthalten; 2) Gleichungen, welche nur die Variablen v enthalten; 3) Gleichungen, welche die Variablen u und v enthalten. Das Integralsystem möge so transformirt sein, dass keine Gleichung der ersten Classe mit Hülfe der Gleichungen der zweiten und dritten Classe hergeleitet werden kann, mit andern Worten, dass die Variablen v nicht aus den Gleichungen dieser Classen eliminirt werden können; dann zeigt eine leichte Ueberlegung, dass jede functionale Verbindung der Gleichungen des Integralsystems zulässig ist.

Es seien μ Gleichungen von der ersten Classe, ϱ von der zweiten und σ von der dritten Classe vorhanden; alsdann muss die Anzahl der in den letzteren $\sigma + \varrho$ Gleichungen vorkommenden Variablen v grösser oder eben so gross als $\varrho + \sigma$ sein, da die Elimination sonst stattfinden könnte. Offenbar ist $\mu \overline{\gtrless} n$.

Werden die $\varrho + \sigma$ Gleichungen differentiirt, so führen sie zu $\varrho + \sigma$ Relationen zwischen den Differentialelementen du und dv. Da die Anzahl der Elemente dv entweder ebenso gross oder grösser als diese Anzahl der Relationen ist, so kann aus letzteren keine Relation oder kein System von Relationen abgeleitet werden, welches die Elemente du allein enthielte. Demnach sind die einzigen Gleichungen, welche zu Relationen zwischen den Differentialelementen du führen können, diejenigen der ersten Classe, deren Anzahl μ ist.

Ist $\mu = n$, so sind wegen der Unabhängigkeit der Gleichungen die Grössen u bestimmte Constanten, so dass

$$du_1 = 0, \ du_2 = 0, \ \ldots, \ du_n = 0$$

ist und daher die Gleichung

$$(1) \qquad v_1 du_1 + v_2 du_2 + \cdots + v_n du_n = 0$$

identisch befriedigt wird durch die n Gleichungen:

$$u_1 = \text{const.}, \ \ldots, \ u_n = \text{const.}$$

Ist $\mu < n$, so kann man die μ unabhängigen Gleichungen derart auf-

Zweitens: Es seien

$$df_0 + \sum_{i=1}^{n} F_i df_i, \quad dg_0 + \sum_{i=1}^{r} G_i dg_i$$

zwei einem Differentialausdruck äquivalente reducirte Formen von ungeradem Charakter; dann ist identisch:

$$d(f_0 - g_0) + \sum_{i=1}^{n} F_i df_i - \sum_{i=1}^{r} G_i dg_i = 0.$$

Diese identische Gleichung ist von dem nämlichen Typus wie vorher; sie kann daher nur mittels $n + r + 1$ Relationen zwischen den Grössen $f_0 - g_0$, F_i, f_i, G_i, g_i befriedigt werden. Ist r die nicht grössere der beiden Zahlen, so behält man nach Elimination der

---

lösen, dass μ von den Grössen u durch die $n - \mu$ übrigen ausgedrückt werden, etwa in der Form:

$$u_i = f_i(u_{\mu+1}, \ldots, u_n),$$

wo $i = 1, 2, \ldots, \mu$ ist. Setzt man für die Grössen u_i ihre Werthe in die Gleichung (1) ein, so geht dieselbe über in:

$$\sum_{\varrho=\mu+1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{\mu} v_i \frac{\partial f_i}{\partial u_\varrho} + v_\varrho \right\} du_\varrho = 0.$$

Es bestehen weiter keine Relationen zwischen den Grössen u_ϱ, und daher keine Relationen zwischen den Elementen du_ϱ; demnach kann die transformirte Gleichung nur identisch befriedigt werden durch die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{\mu} v_i \frac{\partial f_i}{\partial u_\varrho} + v_\varrho = 0,$$

für $\varrho = \mu + 1, \ldots, n$. Dies sind im Ganzen $n - \mu$ Gleichungen; zusammen mit den ersten μ Gleichungen bilden sie ein System von n Gleichungen.

Für die allgemeinsten Formen der Functionen f_i gehören die $n - \mu$ abgeleiteten Gleichungen sämmtlich in die erwähnte dritte Classe von Gleichungen; es wird jedoch ein Glied der zweiten Classe für einen Werth von ϱ vorkommen, wenn sämmtliche Functionen f_i entweder unabhängig von u_ϱ sind oder u_ϱ nur in einem additiven in Bezug auf u_ϱ linearen Ausdrucke oder u_ϱ nur als linearen Factor enthalten.

Das allgemeine Resultat ist daher:

Ein irreducibler Ausdruck

$$v_1 du_1 + v_2 du_2 + \cdots + v_n du_n$$

kann nur mittels eines Systems von n Integralgleichungen identisch zum Verschwinden gebracht werden.

Vgl. Gauss, Ges. Werke, Bd. 3, S. 235; Grassmann's Ausdehnungslehre (1862) S. 352; Lie (a. a. O. S. 343).

$2r+1$ Grössen f_0-g_0, G und g aus diesen Relationen $n-r$ Beziehungen zwischen den Grössen F_i und f_i übrig. Diese Grössen aber sind von einander unabhängig; demnach ist $n-r=0$ oder die beiden Normalformen von ungeradem Charakter, welche einem Differentialausdruck äquivalent sind, enthalten die gleiche Anzahl von Functionen.

Drittens: Zwei einem Differentialausdruck äquivalente reducirte Formen müssen von gleichem Charakter sein. Denn wäre dies nicht der Fall und sind

$$\sum_{i=1}^{n} F_i df_i, \quad d\varphi_0 + \sum_{i=1}^{r} \Phi_i d\varphi_i$$

zwei reducirte Formen, welche demselben Differentialausdruck äquivalent sind, so ist

$$d\varphi_0 + \sum_{i=1}^{r} \Phi_i d\varphi_i - \sum_{i=1}^{n} F_i df_i = 0$$

eine identische Gleichung, welche nur mittels $n+r+1$ Relationen zwischen den Grössen φ, Φ, f, F befriedigt werden kann. Ist $r \geq n$, so ist diese Anzahl von Relationen grösser als $2n$, so dass die Elimination der $2n$ Grössen F und f aus denselben Relationen zwischen den Grössen Φ und φ ergiebt, was nicht möglich ist. Ist dagegen $r<n$, so ist die Anzahl der Relationen grösser als $2r+1$, so dass die Elimination der $2r+1$ Grössen φ und Φ zwischen ihnen Relationen zwischen den Grössen F und f ergiebt, was ebenfalls nicht möglich ist. Demnach kann die obige identische Gleichung nicht bestehen und somit können die beiden reducirten Normalformen von verschiedenem Charakter nicht demselben Differentialausdruck äquivalent sein.

Beispiel. Man kann leicht den folgenden **Satz** beweisen, welcher mit dem Vorhergehenden eng zusammenhängt:

Wenn zwei Differentialausdrücke

$$\sum_{i=1}^{m} X_i dx_i, \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i dy_i$$

(jeder mit einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen) Normalformen haben, welche von gleichem Charakter sind und dieselbe Anzahl von Functionen enthalten, dann können die Ausdrücke in einander transformirt werden.

Lie's Beweis setzt $m = n$ voraus; die Modification für diese allgemeinere Form lässt sich leicht ausführen.

§ 143.

Die Gleichungen, welche die Functionen in zwei einem gegebenen Differentialausdrucke äquivalenten reducirten Normalformen mit einander verbinden, werden von Lie aus den Resultaten der Theorie der Berührungstransformationen abgeleitet; dieselben sind natürlich den entsprechenden Gleichungen in der Clebsch'schen Theorie analog.

Wenn zwei solche Formen von geradem Charakter gegeben sind, z. B.

$$\sum_{i=1}^{n} F_i df_i, \quad \sum_{i=1}^{n} G_i dg_i,$$

welche demselben Ausdruck äquivalent sind, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} G_i dg_i = \sum_{i=1}^{n} F_i df_i$$

ist, wo sämmtliche Grössen auf derselben Seite der Gleichung von einander unabhängig sind, so können wir die bezüglich der homogenen Berührungstransformationen erhaltenen Resultate (§ 139) anwenden. Setzt man:

$$(U, V) = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial F_r} \frac{\partial V}{\partial f_r} - \frac{\partial U}{\partial f_r} \frac{\partial V}{\partial F_r} \right),$$

so sind die Gleichungen, welche von den Grössen G und g erfüllt werden:

$$\left.\begin{aligned} (g_i, g_j) = 0, \quad & \sum_{r=1}^{n} F_r \frac{\partial g_i}{\partial F_r} = 0 \\ (g_i, G_j) = 0 = (G_i, & G_j) \\ (G_i, g_i) = 1, \quad & \sum_{r=1}^{n} F_r \frac{\partial G_i}{\partial F_r} = G_i \end{aligned}\right\}.$$

Es reicht aus, für die Grössen g solche homogene Functionen der Variablen F von der Ordnung 0 zu nehmen, welche den Gleichungen

$$(g_i, g_j) = 0$$

genügen, und für irgend eine der Functionen, z. B. für g_1, kann eine willkürliche Function der Variablen f und F angenommen werden, welche nur der Beschränkung der Homogeneität unterliegt.

Sind zwei reducirte Formen von ungeradem Charakter gegeben, z. B.

$$d\varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} \Phi_i d\varphi_i, \quad d\vartheta_0 + \sum_{i=1}^{n} \Theta_i d\vartheta_i,$$

welche demselben Ausdruck äquivalent sind, so dass

$$d\vartheta_0 + \sum_{i=1}^{n} \Theta_i d\vartheta_i = d\varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} \Phi_i d\varphi_i$$

ist, wo alle Grössen auf der nämlichen Seite der Gleichung von einander unabhängig sind, so kann man die bezüglich der Cylinder-Berührungstransformationen erhaltenen Resultate (§ 136) anwenden. Nach diesen Resultaten ist

$$\vartheta_0 = \varphi_0 - \Pi,$$

wo Π eine Function der Grössen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$ allein ist, und die Gleichungen, welche von Π und den Grössen $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ befriedigt werden, sind:

$$(\vartheta_i, \vartheta_j) = 0, \quad (\Pi, \vartheta_i) = \sum_{r=1}^{n} \Phi_r \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \Phi_r},$$

wo

$$(U, V) = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial \Phi_r} \frac{\partial V}{\partial \varphi_r} - \frac{\partial U}{\partial \varphi_r} \frac{\partial V}{\partial \Phi_r} \right)$$

ist, und die Grössen $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ werden gegeben durch irgendwelche n unabhängige Gleichungen des Systems

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i} - \sum_{r=1}^{n} \Theta_r \frac{\partial \vartheta_r}{\partial \varphi_i} = -\Phi_i$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \Phi_i} - \sum_{r=1}^{n} \Theta_r \frac{\partial \vartheta_r}{\partial \Phi_i} = 0.$$

§ 144.

Es ist wichtig, a priori die Anzahl von Functionen zu bestimmen, welche in der einem gegebenen Ausdrucke

$$\sum_{i=1}^{m} X_i dx_i$$

äquivalenten Normalform vorkommen. Nach § 141 kann dieser Ausdruck entweder auf eine Form von geradem Charakter oder auf eine solche von ungeradem Charakter reducirt werden.

Ist derselbe auf eine Form von geradem Charakter reducirt, z. B. auf

$$\sum_{i=1}^{n} F_i df_i,$$

wo $2n \leq m$ ist, so kann derselbe nicht weiter reducirt werden, wofern nicht eine gewisse Functionalbeziehung zwischen den Grössen F und f besteht. Sind $\alpha, \beta, \ldots, \varrho$ irgend $2n$ Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, m$, so folgt, da die Jacobi'sche Determinante

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n, F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\varrho)},$$

vom Vorzeichen abgesehen, gleich der Pfaff'schen Function $[\alpha, \beta, \ldots, \varrho]$ ist, dass die Form $\sum_{i=1}^{n} F_i df_i$ noch weiter oder nicht mehr weiter reducirt werden kann, je nachdem sämmtliche Pfaff'sche Functionen $[\alpha, \beta, \ldots, \varrho]$ verschwinden oder nicht.

Ist der gegebene Ausdruck auf eine Form von ungeradem Charakter reducirt, z. B. auf

$$d\varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} \Phi_i d\varphi_i,$$

wo $2n + 1 < m$ ist, so kann derselbe nicht weiter reducirt werden, wofern nicht zwischen den Grössen φ und Φ irgend eine functionale Beziehung besteht. Sind $a, b, \ldots, i, \ldots, l$ irgend $2n + 1$ Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, m$, so sind die Grössen φ und Φ von einander abhängig oder nicht, je nachdem alle Jacobi'schen Determinanten

$$\nabla = \frac{\partial(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_n)}{\partial(x_a, x_b, \ldots, x_l)}$$

verschwinden oder nicht verschwinden. Nun ist diese Jacobi'sche Determinante gleich

$$\sum_{i=a,b,\ldots,l} \pm \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_n)}{\partial(\ldots, x_l, x_a, x_b, \ldots)},$$

wobei in der neuen Jacobi'schen Determinante ∇_i, mit welcher $\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i}$ multiplicirt ist, die Variable x_i wegzulassen ist. Daher:

$$\nabla = \sum X_i \nabla_i.$$

Wie vorher ist ∇_i bis auf das Vorzeichen, welches für alle

Grössen ∇_i dasselbe ist, die Pfaff'sche Function $[\ldots, l, a, b, \ldots]$ von der Ordnung $2n$. Somit

$$\nabla = \pm \sum_{i=a,b,\ldots,l} X_i[\ldots, l, a, b, \ldots],$$

wo das Symbol der Pfaff'schen Function mit der auf i folgenden ganzen Zahl der Reihe $a, b, \ldots, l$ beginnt und die Zahl i nicht enthält.

Verschwinden nicht alle von den Grössen

$$\sum_{i=a,b,\ldots,l} X_i[\ldots, l, a, b, \ldots],$$

so lässt sich die Form nicht weiter reduciren; verschwinden sie dagegen sämmtlich, so ist eine weitere Reduction ausführbar.

Verbindet man diese beiden Resultate, so erhält man die folgenden Bedingungen, welche die Anzahl der Functionen in der reducirten Normalform bestimmen.

Wenn sämmtliche aus den Coefficienten des Differentialausdrucks gebildeten Pfaff'schen Functionen von höherer als der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung, aber nicht alle diejenigen von der Ordnung $2n$ verschwinden, so enthält die reducirte Normalform entweder $2n$ oder $2n+1$ Functionen. Sie ist von geradem oder ungeradem Charakter, d. h. sie enthält $2n$ oder $2n+1$ Functionen, je nachdem sämmtliche Ausdrücke

$$\sum_{i=a,b,\ldots,l} X_i[\ldots, l, a, b, \ldots]$$

für jede Combination von $2n+1$ Zahlen $a, b, \ldots, l$ aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ verschwinden oder nicht*).

§ 145.

Wir nehmen nun an, dass ein Differentialausdruck mit $2n+q$ Variablen

$$\Omega_{2n+q} = \sum_{i=1}^{2n+q} X_i dx_i$$

eine reducirte Normalform von geradem Charakter

---

*) Lie selbst spricht dieses Resultat nicht aus, es kann aber aus seinen Untersuchungen gefolgert werden; und es ist einfacher und bestimmter, als das schrittweise von ihm angegebene Verfahren (a. a. O. § 3, S. 352).

$$\sum_{r=1}^{n} F_r df_r$$

mit $2n$ nothwendig von einander unabhängigen Functionen besitzt. Nun verschwinden nicht alle Pfaff'schen Functionen von der Ordnung $2n$; es sei also $[1, \ldots, 2n]$, d. h. eine Function, in welcher die Variablen der Differentiation $x_1, \ldots, x_{2n}$ sind, eine nicht verschwindende Pfaff'sche Function. Dann giebt es unter den Grössen

$$f_1, \ldots, f_n, F_1, \ldots, F_n, x_{2n+1}, \ldots, x_{2n+q}$$

keine Relation, denn die eben erwähnte nicht verschwindende Pfaff'sche Function ist gleich der Jacobi'schen Determinante von

$$f_1, \ldots, f_n, F_1, \ldots, F_n$$

mit Bezug auf $x_1, \ldots, x_{2n}$. Ferner verschwinden mindestens zwei der Grössen W in § 59 nicht; eine von diesen sei W_{2n}, so dass die Grösse

$$W_{2n} = X_1[2, \ldots, 2n-1] + X_2[3, \ldots, 2n-1, 1] + \cdots + X_{2n-1}[1, \ldots, 2n-2]$$

von Null verschieden ist. Es ist aber:

$$[2, \ldots, 2n-1] = \sum \frac{\partial(F_a, f_a, F_b, f_b, \ldots, F_k, f_k)}{\partial(x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1})},$$

wobei $a, b, \ldots, k$ irgend $n-1$ Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ sind und die Summation auf der rechten Seite sich auf die n Glieder erstreckt, welche den n Arten entsprechen, wie diese Zahlen gewählt werden können. Weiter ist:

$$X_i = \sum_{r=1}^{n} F_r \frac{\partial f_r}{\partial x_i}.$$

Demnach erhält man, wenn man diese Werthe in W_{2n} substituirt:

$$\begin{aligned} W_{2n} &= F_1 \frac{\partial(f_1, F_2, f_2, F_3, f_3, \ldots, F_n, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1})} \\ &+ F_2 \frac{\partial(f_2, F_3, f_3, \ldots, F_n, f_n, F_1, f_1)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1})} \\ &+ \cdots \cdots \cdots \cdots \\ &+ F_n \frac{\partial(f_n, F_1, f_1, \ldots, F_{n-1}, f_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1})} \\ &= F_n^n \frac{\partial\left(f_1, f_2, \ldots, f_n, \frac{F_1}{F_n}, \frac{F_2}{F_n}, \ldots, \frac{F_{n-1}}{F_n}\right)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1})}. \end{aligned}$$

Da W_{2n} nicht verschwindet, so verschwindet auch die Jacobische Determinante nicht und daher sind die Grössen

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \frac{F_1}{F_n}, \ldots, \frac{F_{n-1}}{F_n}, x_{2n}, x_{2n+1}, \ldots, x_{2n+q}$$

von einander unabhängig.

Analog, wenn der Differentialausdruck mit $2n+q$ Variablen eine reducirte Normalform vom Charakter

$$d\varphi_0 + \sum_{r=1}^{n} \Phi_r d\varphi_r$$

mit $2n+1$ unabhängigen Functionen hat, so verschwinden die Ausdrücke

$$\sum_{i=a,b,\ldots,l} X_i [\ldots, l, a, b, \ldots]$$

nicht sämmtlich. Ein solcher nicht verschwindender Ausdruck sei:

$$X_1[2, \ldots, 2n+1] + X_2[3, \ldots, 2n+1, 1] + \cdots + X_{2n+1}[1, \ldots, 2n].$$

Ferner können nicht alle Pfaff'schen Functionen von der Ordnung $2n$ verschwinden, da sonst der vorstehende Ausdruck verschwinden würde. Eine solche nicht verschwindende Pfaff'sche Function sei $[1, \ldots, 2n]$. Da diese gleich ist der Functionaldeterminante von

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_n,$$

so folgt, dass die Grössen

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \Phi_1, \ldots, \Phi_n, x_{2n+1}, \ldots, x_{2n+q}$$

von einander unabhängig sind.

§ 146.

Das von Lie angewandte Verfahren zur Bildung der Normalform besteht aus drei verschiedenen Arten von Operationen. Die erste ist die Transformation des gegebenen Differentialausdrucks, deren Normalformcharakter aus den in § 144 angegebenen Versuchen gefolgert worden ist, in der Weise, dass derselbe in einen unreducirten und bedingungslosen Ausdruck mit der geringsten, mit der Existenz einer solchen Form verträglichen Anzahl von Differentialelementen übergeht. Die zweite Operation ist die Herstellung der Normalform jenes transformirten Ausdrucks. Die dritte ist der Uebergang von dieser Normalform zur Normalform des gegebenen Ausdrucks. Dies Verfahren der Herstellung dieser letzteren ist ein schrittweises und die

verschiedenen Operationen werden bei dieser schrittweisen Reduction in abwechselnder Reihenfolge angewendet.

Der Lie'schen Methode sehr nahe verwandt ist die erste Methode von Clebsch (§§ 117—119), wenn man dieselbe mit der Methode von Mayer für die Lösung der dabei auftretenden Systeme partieller Differentialgleichungen combinirt. Die charakteristische Differenz in der gegenwärtigen Methode ist die Anwendung der Cauchy'schen Substitutionen auf den Differentialausdruck selbst, ehe noch irgend eine der Hülfsgleichungen gebildet ist.

§ 147.

Wir nehmen nun an, dass man nach den Regeln in § 144 erkannt habe, dass der Differentialausdruck

$$\Omega = \sum_{i=1}^{2n+q} X_i dx_i$$

mit $2n + q$ Veränderlichen eine Normalform von geradem Charakter mit $2n$ Functionen habe, z. B.

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} F_i df_i ,$$

wo die Functionen f und F von einander unabhängig sind. Dann kann man annehmen, dass $[1, 2, \ldots, 2n]$ eine nicht verschwindende Pfaff'sche Function (§ 145) von der Ordnung $2n$ sei und dass auch der Ausdruck

$$X_1 [2, \ldots, 2n-1] + X_2 [3, \ldots, 2n-1, 1] \\ + \cdots + X_{2n-1} [1, \ldots, 2n-2]$$

nicht verschwindet. Es folgt dann hieraus, dass die Grössen

$$f_1, \ldots, f_n, \frac{F_1}{F_n}, \ldots, \frac{F_{n-1}}{F_n}, x_{2n}, x_{2n+1}, \ldots, x_{2n+q}$$

von einander unabhängige Grössen sind.

Um Ω in einen Ausdruck mit $2n$ Differentialelementen zu verwandeln, machen wir die Substitution

$$x_{2n+k} = \alpha_{2n+k} + (x_{2n} - \alpha_{2n}) y_k$$

für $k = 1, 2, \ldots, q$ und betrachten die Grössen y_k als unveränderlich*).

*) Lie benutzt die Bezeichnung λ statt y. Die obige Bezeichnung ist angewendet in Uebereinstimmung mit der von Mayer gebrauchten (§§ 35 u. 41), nur dass die erste Substitution (welche nur identisch, nämlich $x_{2n} = y$) weggelassen ist.

Wird X_μ, nachdem die obigen Substitutionen ausgeführt sind, mit Y_μ bezeichnet, so verwandelt sich Ω in Ω'_{2n}, wo

$$\Omega'_{2n} = \sum_{i=1}^{2n-1} Y_i dx_i + (Y_{2n} + y_1 Y_{2n+1} + \cdots + y_q Y_{2n+q}) dx_{2n}.$$

Dann enthält die Normalform von Ω'_{2n} $2n$ Functionen. Denn da die zu Ω gehörige Pfaff'sche Function $[1, \ldots, 2n]$ nicht verschwindet und dieselbe die Jacobi'sche Functionaldeterminante von $f_1, \ldots, F_n$ in Bezug auf $x_1, \ldots, x_{2n}$ ist, so muss die neue zu Ω'_{2n} gehörige Pfaff'sche Function $[1, \ldots, 2n]'$ die Jacobi'sche Determinante der transformirten Functionen $f_1, \ldots, F_n$, d. i. etwa von $f_1^{(y)}, \ldots, F_n^{(y)}$ in Bezug auf $x_1, \ldots, x_{2n}$ sein. Diese neue Jacobi'sche Determinante kann aber nicht verschwinden, da sonst zwischen den (möglicherweise) die Grössen y und α enthaltenden Functionen $f_1^{(y)}, \ldots, F_n^{(y)}$ eine Relation stattfinden würde. Substituirten wir dann in den Grössen $f_1^{(y)}, \ldots, F_n^{(y)}$ für die y ihre Werthe, so würden sie übergehen resp. in $f_1, \ldots, F_n$, so dass die erhaltene Relation übergehen würde in eine zwischen $f_1, \ldots, F_n$ und einer Anzahl willkürlich angenommener, aber von $x_1, \ldots, x_{2n}$ unabhängiger Constanten α und y. Dies ist aber durch die Voraussetzung ausgeschlossen, dass $\Sigma F df$ die Normalform von Ω ist. Demnach besteht keine Relation zwischen den Grössen $f^{(y)}$ und $F^{(y)}$, oder die Pfaff'sche Function $2n^{\text{ter}}$ Ordnung von Ω'_{2n} verschwindet. Mithin enthält die Normalform von Ω'_{2n} $2n$ Functionen. Also:

Die Substitutionen

$$x_{2n+k} = \alpha_{2n+k} + (x_{2n} - \alpha_{2n}) y_k$$
$$(k = 1, 2, \ldots, q)$$

verwandeln Ω in einen Ausdruck Ω'_{2n}, dessen Normalform $2n$ Functionen enthält.

Die Wichtigkeit der Transformation beruht auf dem Umstande, dass wir aus der Normalform von Ω'_{2n} die Normalform von Ω nur durch algebraische Operationen herleiten können. Wir gehen jetzt zum Beweise hiervon über.

§ 148.

Es werde also angenommen, dass eine Normalform von Ω'_{2n} lautet:

$$\Omega'_{2n} = \Phi_1 d\varphi_1 + \cdots + \Phi_n d\varphi_n,$$

wo die Grössen φ und Φ $2n$ unabhängige Functionen der Variablen

$x_1, \ldots, x_{2n}$ und der Grössen y und α sind, und es werde die Normalform von Ω durch

$$\Omega = F_1 df_1 + \cdots + F_n df_n$$

bezeichnet. Werden die Substitutionen für die Variablen in Ω und in $\sum F df$ ausgeführt, so folgt, dass

$$\sum F^{(y)} df^{(y)}$$

eine Normalform von Ω'_{2n} ist und dass somit

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \frac{\Phi_1}{\Phi_n}, \ldots, \frac{\Phi_{n-1}}{\Phi_n}$$

$2n - 1$ unabhängige Functionen von

$$f_1^{(y)}, \ldots, f_n^{(y)}, \frac{F_1^{(y)}}{F_n^{(y)}}, \ldots, \frac{F_{n-1}^{(y)}}{F_n^{(y)}}$$

sind.

Bezeichnet man $\frac{F_\mu}{F_n}$ mit $f_{n+\mu}$ für $\mu = 1, 2, \ldots, n - 1$, so erhält man

$$f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{2n-1}, x_{2n}, \ldots, x_{2n+q}$$

als von einander unabhängige Grössen und das System der Gleichungen

$$A_k f = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_{2n-1}, f)}{\partial(x_1, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n+k})} = 0$$
$$(k = 0, 1, \ldots, q)$$

besitzt die $2n - 1$ unabhängigen Lösungen $f = f_1, f_2, \ldots, f_{2n-1}$. Ueberdies kommt $\frac{\partial f}{\partial x_{2n+k}}$ nur in $A_k f$ vor; die Gleichungen sind somit algebraisch unabhängig von einander.

Diese Gleichungen sind linear und homogen in den partiellen Differentialquotienten von f und enthalten nicht die abhängige Variable f selbst; sie sind daher von dem Typus, auf welchen die Mayer-sche Methode anwendbar ist. Das System enthält $q + 1$ Gleichungen und die Anzahl der vorkommenden Veränderlichen ist $2n + q$; ferner weiss man, dass es $2n - 1\ (= 2n + q - q - 1)$ unabhängige Lösungen giebt. Das System ist demnach ein vollständiges System.

Die Gleichung

$$A_k f = 0$$

kann geschrieben werden:

$$\Theta \frac{\partial f}{\partial x_{2n+k}} + \sum_{s=1}^{2n-1} U_{k,s} \frac{\partial f}{\partial x_s} = 0,$$

wo

$$U_{k,s} = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_{2n-1})}{\partial_s(x_1, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n+k})}$$

und der Index an ∂_s besagt, dass x_s aus der Reihe der Variablen x in der Determinante weggelassen ist, und wo ferner die Determinante

$$\Theta = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_{2n-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{2n-1})}$$

für alle Gleichungen dieselbe ist. Wird Mayer's Methode nebst den einfachsten Substitutionen (§ 35) angewendet, so ist die einzige Gleichung zur Bestimmung eines Integralsystems

$$\Theta^{(y)} \frac{\partial f}{\partial x_{2n}} + \sum_{s=1}^{2n-1} Y_s \frac{\partial f}{\partial x_s} = 0,$$

wo $\Theta^{(y)}$ der Werth von Θ ist, den man erhält, wenn diese Substitutionen in Θ ausgeführt sind, und wo die Coefficienten Y gegeben sind durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} Y_s &= U_{0,s} + y_1 U_{1,s} + y_2 U_{2,s} + \cdots + y_q U_{q,s} \\ &= \left|\frac{\partial(f_1, \ldots, f_{2n-1})}{\partial_s(x_1, \ldots, x_{2n})}\right|^{(y)} + y_1 \left|\frac{\partial(f_1, \ldots, f_{2n-1})}{\partial_s(x_1, \ldots, x_{2n+1})}\right|^{(y)} + \cdots + y_q \left|\frac{\partial(f_1, \ldots, f_{2n-1})}{\partial_s(x_1, \ldots, x_{2n+q})}\right|^{(y)}. \end{aligned}$$

Es ist aber:

$$\left|\frac{\partial \vartheta}{\partial x_\mu}\right|^{(y)} = \frac{\partial \vartheta^{(y)}}{\partial x_\mu} \quad \text{für } \mu = 1, \ldots, 2n-1$$

und

$$\frac{\partial \vartheta^{(y)}}{\partial x_{2n}} = \left|\frac{\partial \vartheta}{\partial x_{2n}}\right|^{(y)} + y_1 \left|\frac{\partial \vartheta}{\partial x_{2n+1}}\right|^{(y)} + \cdots + y_q \left|\frac{\partial \vartheta}{\partial x_{2n+q}}\right|^{(y)}.$$

Hiernach erhalten wir:

$$Y_s = \frac{\partial(f_1^{(y)}, \ldots, f_{2n-1}^{(y)})}{\partial_s(x_1, \ldots, x_{2n})}$$

und

$$\Theta^{(y)} = \frac{\partial(f_1^{(y)}, \ldots, f_{2n-1}^{(y)})}{\partial(x_1, \ldots, x_{2n-1})},$$

so dass die einzige Mayer'sche Hülfsgleichung ist:

$$\frac{\partial(f_1^{(y)}, \ldots, f_{2n-1}^{(y)}, f)}{\partial(x_1, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n})} = 0,$$

eine Gleichung mit $2n$ Veränderlichen, die somit $2n-1$ unabhängige Lösungen hat. Ein evidentes System von Lösungen ist $f_1^{(y)}, \ldots, f_{2n-1}^{(y)}$; irgend ein System von $2n-1$ unabhängigen Functionen dieser Grössen ist ebenfalls ein System von Lösungen. Ein

solches System von unabhängigen Functionen wird gebildet durch $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \frac{\Phi_1}{\Phi_n}, \ldots, \frac{\Phi_{n-1}}{\Phi_n}$, ein bereits als bekannt vorausgesetztes System, da eine Normalform von Ω'_{2n} als bekannt vorausgesetzt wurde.

Es ist daher ersichtlich, dass ein vollständiges Integralsystem der Hülfsgleichung bekannt ist.

Alsdann wird nach Mayer's Theorem (§ 41) ein System von Integralen des Systems von Gleichungen $A_k f = 0$ gegeben, wenn man die Gleichungen bildet:

$$\varphi_\mu(x_1, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}, y_1, \ldots, y_q) = \varphi_\mu(h_1, \ldots, h_{2n-1}, \alpha_{2n}, y_1, \ldots, y_q)$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, 2n-1),$$

wobei die Grösse $\varphi_{n+\lambda}$ für $\frac{\Phi_\lambda}{\Phi_n}$ steht. In diesen Gleichungen werden die Variablen y durch ihre Werthe als Functionen der Variablen x ersetzt; die $2n-1$ Gleichungen werden dann nach den $2n-1$ Grössen h aufgelöst und ergeben Resultate von der Form:

$$h_\mu = h_\mu(x_1, \ldots, x_{2n+q}),$$

wo die Function auf der rechten Seite durch die Substitutionen $x_{2n+k} = \alpha_{2n+k}$ für $k = 0, 1, \ldots, q$ in x_μ übergeht. Dies sind die Hauptintegrale des Systems der Gleichungen $A_k f = 0$ und die Functionen $f_1, \ldots, f_{2n-1}$ sind $2n-1$ unabhängige Functionen dieser Hauptintegrale.

§ 149.

Wir gehen nun zur Herstellung einer Normalform von Ω über. Es ist:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{2n+q} X_i dx_i$$
$$= (f_{n+1} df_1 + f_{n+2} df_2 + \cdots + f_{2n-1} df_{n-1} + df_n) F_n .$$

Substituirt man auf der rechten Seite für die Functionen $f_1, \ldots, f_{2n-1}$ ihre Ausdrücke in den Hauptintegralen h, so kommt man zu einem Resultate von der Form:

$$\Omega = \varrho \sum_{i=1}^{2n-1} H_i(h_1, \ldots, h_{2n-1})\, dh_i,$$

wo ϱ und die Functionen H_i unbekannt sind. In dieser Gleichung setzen wir $x_{2n+\mu} = \alpha_{2n+\mu}$ für $\mu = 0, 1, 2, \ldots, q$; alsdann ist $h_i = x_i$ und somit:

$$\sum_{i=1}^{2n-1} X_i(x_1, \ldots, x_{2n-1}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{2n+q})\, dx_i$$
$$= \varrho_\alpha \sum_{i=1}^{2n-1} H_i(x_1, \ldots, x_{2n-1})\, dx_i .$$

Dies ist nur eine Identität; somit erhalten wir, wenn ϱ_α, nachdem die Grössen x durch die Grössen h ersetzt sind, mit σ_α bezeichnet wird:

$$\sum_{i=1}^{2n-1} X_i(h_1, \ldots, h_{2n-1}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{2n+q})\, dh_i$$
$$= \sigma_\alpha \sum_{i=1}^{2n-1} H_i(h_1, \ldots, h_{2n-1})\, dh_i ,$$

und daher:

$$\Omega = \frac{\sigma_\alpha}{\varrho} \sum_{i=1}^{2n-1} X_i(h_1, \ldots, h_{2n-1}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{2n+q})\, dh_i .$$

Kehren wir zur transformirten Form von Ω zurück, so ist:

$$\Omega_{2n}' = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x_1, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}, y_1, \ldots, y_q)\, d\varphi_i(x_1, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}, y_1, \ldots, y_q).$$

Setzt man $x_{2n} = \alpha_{2n}$, daher $x_{2n+j} = \alpha_{2n+j}$, so erhält man als die neue Form von Ω_{2n}':

$$\sum_{i=1}^{2n-1} X_i(x_1, \ldots, x_{2n-1}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{2n+q})\, dx_i ,$$

und daher:

$$\sum_{i=1}^{2n-1} X_i(x_1, \ldots, x_{2n-1}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{2n+q})\, dx_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x_1, \ldots, x_{2n-1}, \alpha_{2n}, y_1, \ldots, y_q)\, d\varphi_i(x_1, \ldots, x_{2n-1}, \alpha_{2n}, y_1, \ldots, y_q).$$

Da dies nur eine Identität ist, so hat man auch:

$$\sum_{i=1}^{2n-1} X_i(h_1, \ldots, h_{2n-1}, \alpha_{2n}, \ldots, \alpha_{2n+q})\, dh_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(h_1, \ldots, h_{2n-1}, \alpha_{2n}, y_1, \ldots, y_q)\, d\varphi_i(h_1, \ldots, h_{2n-1}, \alpha_{2n}, y_1, \ldots, y_q),$$

und daher:

$$\Omega = \frac{\sigma_\alpha}{\varrho} \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(h_1, \ldots, h_{2n-1}, \alpha_{2n}, y_1, \ldots, y_q) d\varphi_i(h_1, \ldots, h_{2n-1}, \alpha_{2n}, y_1, \ldots, y_q),$$

und dies ist eine Normalform des ursprünglich gegebenen Ausdrucks.

Der Werth von $\frac{\sigma_\alpha}{\varrho}$ wird gegeben durch irgend eine der Gleichungen:

$$X_\lambda = \frac{\sigma_\alpha}{\varrho} \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(h_1, \ldots, h_{2n-1}, \alpha_{2n}, y_1, \ldots, y_q) \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \varphi_i(h_1, \ldots, h_{2n-1}, \alpha_{2n}, y_1, \ldots, y_q)$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, 2n + q).$$

Da die Grössen $h_1, \ldots, h_{2n-1}$ aus φ und Φ durch blosse algebraische Operationen ableitbar sind, so folgt, dass die oben gegebene Normalform von Ω sich in bestimmter Form aus der Normalform des transformirten Ausdrucks Ω'_{2n} herleiten lässt. Demnach hängt die Bildung der Normalform eines bedingten Differentialausdrucks von geradem Charakter ab von der Normalform eines bedingungslosen Differentialausdrucks, in Uebereinstimmung mit dem folgenden von Lie herrührenden Satze:

Wenn ein Differentialausdruck mit $2n + q$ Variabeln

$$\Omega = \sum_{i=1}^{2n+q} X_i dx_i$$

eine Normalform geraden Charakters mit $2n$ Functionen besitzt, so transformiren die Substitutionen

$$x_{2n+k} = \alpha_{2n+k} + (x_{2n} - \alpha_{2n}) y_k,$$

wo die Grössen y unveränderlich sind und $k = 1, \ldots, q$ ist, den Ausdruck Ω in einen Ausdruck Ω'_{2n} mit einer ähnlichen Normalform. Ist

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_i d\varphi_i,$$

wo φ und Φ Functionen der Variabeln x und der Grössen α und y sind, diese Normalform von Ω'_{2n}, so ist die Normalform von Ω:

$$\omega \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(h_1, \ldots, h_{2n-1}, \alpha_{2n}, y_1, \ldots, y_q) d\varphi_i(h_1, \ldots, h_{2n-1}, \alpha_{2n}, y_1, \ldots, y_q),$$

wo ω durch irgend eine der Gleichungen

$$X_r = \omega \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(h, \alpha, y) \frac{\partial}{\partial x_r} \varphi_i(h, \alpha, y)$$

bestimmt ist und die $2n-1$ Grössen h, welche unabhängige Functionen der Variablen und der Grössen α und y sind, durch die $2n-1$ Gleichungen

$$\vartheta(x_1, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}, y_1, \ldots, y_q) = \vartheta(h_1, \ldots, h_{2n-1}, \alpha_{2n}, y_1, \ldots, y_q)$$

bestimmt werden, wobei das Functionszeichen ϑ der Reihe nach $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \frac{\Phi_1}{\Phi_n}, \ldots, \frac{\Phi_{n-1}}{\Phi_n}$ bezeichnet. Alsdann führt eine Rückwärtstransformation, indem man wieder die y durch ihre Werthe in den Variabeln x ersetzt, zu einem expliciten Ausdruck für die Normalform von Ω.

Beispiel 1. Die Probe nach § 144 zeigt, dass der Ausdruck

$$(x_1x_2+x_2x_6)dx_1+(x_1^2+x_2x_5)\,dx_2+x_1x_4dx_3+x_1x_3\,dx_4$$
$$+(x_1x_6+x_2^2)dx_5+(x_1x_5+x_1x_2)dx_6 = \Omega$$

eine Normalform von der allgemeinen Gestalt $Fdf + Gdg$ hat. Weder die Pfaff'sche Function $[1, 2, 5, 6]$ noch der Ausdruck

$$[1, 2]\,X_5 + [2, 5]\,X_1 + [5, 1]\,X_2$$

sind Null; demnach sind $f, g, \frac{G}{F}, x_6, x_3, x_4$ von einander unabhängig.

Substituirt man

$$x_3 = \alpha + y(x_6 - \varepsilon), \quad x_4 = \beta + z(x_6 - \varepsilon)$$

in Ω (wo y und z als unveränderlich gelten), so wird die neue Form:

$$\Omega' = (x_1x_2+x_2x_6)dx_1+(x_1^2+x_2x_5)dx_2+(x_1x_6+x_2^2)dx_5$$
$$+(x_1x_5+x_1x_2+x_1x_4y+x_1x_3z)dx_6.$$

Eine Normalform von Ω' ist:

$$x_1\,d\varphi_1 + x_2\,d\varphi_2,$$

wo

$$\varphi_2 = x_1x_6 + x_2x_5$$
$$\varphi_1 = x_1x_2 + x_5x_6 + (y\beta + z\alpha)x_6 + yz(x_6^2 - 2\varepsilon x_6)$$

ist. Daher setzen wir:

$$x_1x_2+x_5x_6+(y\beta+z\alpha)x_6+yz(x_6^2-2\varepsilon x_6)=h_1h_2+h_5\varepsilon+(y\beta+z\alpha)\varepsilon-yz\varepsilon^2$$
$$x_1x_6+x_2x_5=h_2h_5+h_1\varepsilon$$
$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{h_2}{h_1}.$$

Hieraus ist:

$$\frac{\Phi_2(h_1, \ldots)}{\Phi_1(h_1, \ldots)} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{x_2}{x_1}$$
$$\varphi_2(h_1, \ldots) = x_1x_6 + x_2x_5$$
$$\varphi_1(h_1, \ldots) = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 - a_3a_4,$$

wo a_3 und a_4 die Werthe von resp. x_3 und x_4 für $x_6 = 0$ sind.

Nun ist:

$$\Omega = \omega \, \{ \Phi_1(h_1, \ldots) d\varphi_1(h_1, \ldots) + \Phi_2(h_1, \ldots) d\varphi_2(h_1, \ldots) \}$$

$$= \omega' \left[d(x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6 - a_3 a_4) + \frac{x_2}{x_1} d(x_1 x_6 + x_2 x_5) \right],$$

wo ω' die Grösse $\omega \Phi_1(h_1, \ldots)$ bezeichnet. Um ω' zu finden, hat man:

$$x_1 x_2 + x_2 x_6 = X_1$$

$$= \omega' \left(x_2 + \frac{x_2}{x_1} x_6 \right),$$

daher:

$$\omega' = x_1 .$$

Ferner kann die Constante $a_3 a_4$ wegen der Differentiation weggelassen werden und demnach ist eine Normalform von Ω:

$$x_1 d(x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6) + x_2 d(x_1 x_6 + x_2 x_5).$$

Sämmtliche äquivalenten Normalformen können durch die Gleichungen des § 143 erhalten werden.

Aufgabe. Man discutire in analoger Weise den Ausdruck $\sum_{i=1}^{6} X_i dx_i$, wo:

$$\begin{aligned}
X_1 &= x_1 x_6^2 + x_2 x_5 (x_2 + x_4) \\
X_2 &= x_1 x_5 x_6 + x_1 x_5 (x_2 + x_4) \\
X_3 &= x_1 x_4 x_6 + x_5^2 (x_2 + x_4) \\
X_4 &= x_1 x_3 x_6 + x_5 x_6 (x_2 + x_4) \\
X_5 &= x_1 x_2 x_6 + x_3 x_5 (x_2 + x_4) \\
X_6 &= x_1^2 x_6 + x_4 x_5 (x_2 + x_4).
\end{aligned}$$

§ 150.

Die homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen, welche die in der Normalform von Ω vorkommenden Grössen $f_1, \ldots, f_{2n-1}$ zu ihrem Integralsystem haben, enthalten, in der Gestalt wie sie in § 148 gegeben wurden, explicit vorkommende unbekannte Formen; die Ausdrücke können aber auf Grund von Eigenschaften, welche denen in § 145 analog sind, derart transformirt werden, dass nur bekannte Formen vorkommen.

Das System der Gleichungen ist:

$$A_k f = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_{2n-1}, f)}{\partial(x_1, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n+k})} = 0;$$

dasselbe kann in der Form geschrieben werden:

$$z_{2n} \frac{\partial f}{\partial x_{2n+k}} + \sum_{s=1}^{2n-1} z_{k,s} \frac{\partial f}{\partial x_s} = 0,$$

wo

$$z_{2n} = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_{2n-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{2n-1})}$$

und

$$z_{k,s} = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_{2n-1})}{\partial_s(x_1, \ldots, x_{2n+k})}$$

ist, und wo in letzterem Ausdrucke der Index an ∂_s bedeutet, dass x_s aus der Reihe $x_1, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n+k}$ weggelassen ist.

Im § 145 hatten wir bewiesen, dass

$$F^n_n z_{2n} = F^n_n \frac{\partial(f_1, \ldots, f_{2n-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{2n-1})} = \sum_{r=1}^{2n-1} X_r[r+1, \ldots, r-1]$$

ist; analog lässt sich beweisen, dass

$$F^n_n z_{k,s} = F^n_n \frac{\partial(f_1, \ldots, f_{2n-1})}{\partial_s(x_1, \ldots, x_{2n+k})} = \sum_{r=1}^{2n+k} X_r[r+1, \ldots, r-1]$$

ist, wo sich auf der rechten Seite die Summation auf diejenigen Glieder erstreckt, für welche

$$r = 1, \ldots, s-1, s+1, \ldots, 2n-1, 2n+k$$

ist. Setzen wir daher

$$y = z F^n_n$$

für jede der Grössen z, so gehen die Gleichungen über in:

$$(A) \qquad y_{2n} \frac{\partial f}{\partial x_{2n+k}} + \sum_{s=1}^{2n-1} y_{k,s} \frac{\partial f}{\partial x_s} = 0$$

$$(k = 0, 1, \ldots, q)^{*})$$

und in dieser Form der Gleichungen sind sämmtliche Coefficienten der Ableitungen von f ausgedrückt durch die in Ω vorkommenden Grössen X. Insbesondere kann die dem Werthe $k = 0$ entsprechende Gleichung des Systems (A) geschrieben werden, wie folgt:

$$\sum_{s=1}^{2n} y_s \frac{\partial f}{\partial x_s} = 0,$$

---

*) Diese Gleichungen, ausser derjenigen für $k = 0$, sind von Lie nicht gegeben worden; jede derselben enthält nur $2n$ partielle Differentialquotienten, an Stelle von $2n + 1$ solchen, wie es bei den folgenden Gleichungen und beim Clebsch'schen System der Fall ist.

indem wir y_s statt $y_{0,s}$ schreiben; dieselbe ist implicit die nämliche, wie das System von Gleichungen, welche bei der Pfaff'schen Reduction vorkommen, und wie die erste Gleichung in dem System von Clebsch*).

§ 151.

Um die Reduction eines Differentialausdrucks, welcher eine Normalform von geradem Charakter hat, zu vollenden, bleibt nur noch die Normalform eines bedingungslosen Differentialausdrucks mit einer geraden Anzahl von Variabeln zu bilden übrig.

Ein solcher Ausdruck sei:

$$\Omega_{2n} = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}.$$

---

*) Die übrigen Gleichungen in dem System von Clebsch können folgendermassen erhalten werden: Die Gleichungen

$$B_k f = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n, F_1, \ldots, F_n, f)}{\partial(x_1, \ldots\ldots\ldots, x_{2n}, x_{2n+k})} = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, q)$$

werden befriedigt durch $f = f_1, \ldots, f_n, F_1, \ldots, F_n$, d. h. sie stellen ein System von q Gleichungen zwischen $2n + q$ Variabeln mit $2n$ von einander unabhängigen Lösungen dar und sind demnach ein vollständiges System. Nun ist in $B_k f$ der Coefficient von $\frac{\partial f}{\partial x_s}$:

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n, F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_{2n}, x_{2n+k})}$$
$$= [1, \ldots, s-1, s+1, \ldots, 2n, 2n+k],$$

also eine Pfaff'sche Function von der Ordnung $2n$, und somit ist die Gleichung:

$$B_k f = \sum_{s=1}^{2n, 2n+k} \frac{\partial f}{\partial x_s} [1, \ldots, s-1, s+1, \ldots, 2n, 2n+k] = 0,$$

und jede dieser Gleichungen enthält $2n + 1$ Ableitungen von f.

Mit Hülfe der Eigenschaften der Determinanten lässt sich beweisen, dass diese Gleichungen identisch sind mit dem Clebsch'schen System analoger Gleichungen. Wie bei der Theorie von Clebsch, werden die Grössen $f_1, \ldots, f_{2n-1}$ durch die q Gleichungen

$$B_1 f = 0, \quad B_2 f = 0, \ldots, B_q f = 0$$

in Verbindung mit

$$\sum_{s=1}^{2n} y_s \frac{\partial f}{\partial x_s} = 0,$$

welche ebenfalls ein vollständiges System bilden, bestimmt.

Alsdann ist die einzige partielle Differentialgleichung, welche die n Functionen, die die Differentialelemente der Normalform geben, sowie die $n - 1$ von einander unabhängigen Verhältnisse der Coefficienten dieser Differentialelemente bestimmt, die folgende:

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + y_{2n} \frac{\partial f}{\partial x_{2n}} = 0,$$

wo wie oben

$$(-1)^{r-1} y_r = \sum_{s=1}^{2n} X_s [s+1, \ldots, s-1]$$

ist und $s + 1, \ldots s - 1$ die Zahlen $1, 2, \ldots, 2n$ in cyklischer Aufeinanderfolge mit Weglassung der Zahlen s und r und beginnend mit der auf s zunächst folgenden ganzen Zahl sind.

Ein Integral dieser Differentialgleichung sei:

$$g_1(x_1, \ldots, x_{2n}) = \text{const.} = a_1,$$

und es werde angenommen, dass diese Gleichung nach x_{2n} aufgelöst sei, so dass x_{2n} explicit dargestellt ist in der Form:

$$x_{2n} = \gamma_1(x_1, \ldots, x_{2n-1}, a_1).$$

Wird diese Substitution für x_{2n} in Ω_{2n} ausgeführt, so geht Ω_{2n} in einen Differentialausdruck mit $2n - 1$ Variablen über, z. B. in Ω'_{2n-1}, dessen Normalform $2n - 2$ Functionen enthält. Ist

$$\Omega'_{2n-1} = \Phi_1 d\varphi_1 + \cdots + \Phi_{n-1} d\varphi_{n-1}$$

und ersetzt man a_1 überall, wo es vorkommt, durch $g_1(x_1, \ldots, x_{2n})$, so wird:

$$\Omega_{2n} = \Phi_1 d\varphi_1 + \cdots + \Phi_{n-1} d\varphi_{n-1} + G_1 dg_1,$$

wo G_1 ohne Weiteres gefunden werden kann, wenn die Normalform von Ω'_{2n-1} bekannt ist.

Da die Normalform von Ω'_{2n-1}, welche $2n - 1$ Variabeln enthält, nur $2n - 2$ Functionen hat, so wenden wir wie in § 147 eine einzige Substitution an und verwandeln sie in einen bedingungslosen Ausdruck Ω_{2n-2}, aus dessen Normalform diejenige von Ω'_{2n-1} nach der Methode des § 149 abgeleitet werden kann.

Der neue Ausdruck wird in der nämlichen Art behandelt, wie Ω_{2n}, und so weiter fort, bis man zu einem Ausdruck zwischen zwei Variablen allein gelangt, welcher dargestellt werden kann in der Form: $G_n dg_n$.

Die Combination der drei Operationen, durch welche die Normalform von Ω_{2n} von derjenigen von Ω_{2n-2} abhängig gemacht wird, nämlich 1) die Ableitung irgend einer Lösung der Hülfsgleichung für

Ω_{2n}, 2) die Substitution des Werthes einer Variablen mittels jener Lösung in Ω_{2n}, 3) eine einzige Cauchy'sche Transformation angewendet auf den durch (2) transformirten Ausdruck, möge eine Reduction von der Ordnung $2n$ genannt werden.

§ 152.

Die Lie'sche Methode für die Reduction eines Pfaff-schen Ausdrucks Ω zwischen $2n+q$ Variablen, welcher eine Normalform geraden Charakters mit $2n$ Functionen besitzt, ist demnach allgemein die folgende:

Der Ausdruck Ω wird durch q Cauchy'sche Transformationen auf Ω_{2n} transformirt; mittels einer Reduction von der Ordnung $2n$ wird Ω_{2n} auf Ω_{2n-2}, mittels einer Reduction von der Ordnung $2n-2$ wird Ω_{2n-2} auf Ω_{2n-4} zurückgeführt und so weiter fort, bis man einen Ausdruck Ω_2 findet. Wird dieser auf ein einziges Glied transformirt, so gelangt man durch bestimmte und explicite Operationen zu den Normalformen von $\Omega_4, \Omega_6, \ldots, \Omega_{2n}, \Omega_{2n+q}$.

§ 153.

Wir gehen nun zur Erörterung der Annahme, welche den zweiten der in § 147 angegebenen Fälle bildet, über, nämlich dass der Differentialausdruck

$$\Omega = \sum_{i=1}^{2n+q} X_i dx_i$$

nach Ausweis der Probe des § 144 eine Normalform von ungeradem Charakter mit $2n+1$ Functionen besitzt, etwa:

$$df_0 + \sum_{i=1}^{n} F_i df_i.$$

Die Methode ist dieselbe, wie die bereits in den § 147 bis § 152 benutzte. Da die analytischen Einzelheiten der Beweise der verschiedenen Resultate denen in der eben vollendeten Untersuchung sehr ähnlich sind, so wird es ausreichen, bloss diese Resultate anzuführen.

§ 154.

Es wird vorausgesetzt (§ 145), dass

$$\sum_{s=1}^{2n+1} X_s [s+1, \ldots, s-1]$$

nicht verschwindet und dass der Coefficient von X_{2n+1} in diesem Ausdruck, d. i. die Pfaff'sche Function $[1, 2, \ldots, 2n]$ ebenfalls von Null verschieden ist.

1) Werden die Substitutionen

$$x_{2n+k} = \alpha_{2n+k} + (x_{2n+1} - \alpha_{2n+1}) y_k$$
$$(k = 2, \ldots, q)$$

auf Ω angewendet, so wird dadurch Ω in einen Ausdruck Ω'_{2n+1} mit $2n+1$ Variabeln transformirt, dessen Normalform $2n+1$ Functionen enthält.

2) Es sei eine Normalform von Ω'_{2n+1} die folgende:

$$d\varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} \Phi_i \, d\varphi_i,$$

wo die Grössen φ und Φ Functionen der Variabeln $x_1, \ldots, x_{2n+1}$ und der Grössen y und α sind; man löse sodann die $2n$ Gleichungen

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_{2n}, x_{2n+1}, y_2, \ldots, y_q) = \varphi_i(h_1, \ldots, h_{2n}, \alpha_{2n+1}, y_2, \ldots, y_q)$$
$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_{2n}, x_{2n+1}, y_2, \ldots, y_q) = \Phi_i(h_1, \ldots, h_{2n}, \alpha_{2n+1}, y_2, \ldots, y_q)$$

nach den $2n$ Grössen $h_1, \ldots, h_{2n}$ auf, so dass dieselben dargestellt werden als Functionen der Variablen. Sind die Werthe derselben gefunden, so ersetze man darin die y durch ihre Werthe in den Variablen x. Erhält man so die Gleichungen

$$h_\mu = h_\mu(x_1, \ldots, x_{2n+q}) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 2n),$$

so ist eine Normalform des ursprünglich gegebenen Ausdrucks:

$$d\varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(h_1, \ldots, h_{2n}, \alpha_{2n+1}, y_2, \ldots, y_q) \, d\varphi_i(h_1, \ldots, h_{2n}, \alpha_{2n+1}, y_2, \ldots, y_q),$$

wo φ_0 bestimmt wird durch eine Quadratur:

$$\varphi_0 = \int \left\{ \sum_{i=1}^{2n+q} X_i \, dx_i - \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(h, y) \, d\varphi_i(h, y) \right\}.$$

3) Es bezeichne $\vartheta_{k,s}$ die Pfaff'sche Function $[s+1, \ldots, s-1]$, wo $s+1, \ldots, s-1$ die Zahlen $1, 2, \ldots, 2n, 2n+k$ in cyklischer Reihenfolge unter Weglassung von s und von der auf s in der Reihe zunächst folgenden angefangen sind. Alsdann ist das System von q Gleichungen, welche $f_1, \ldots, f_n, F_1, \ldots, F_n$ zu ihrem Integralsystem haben, das folgende:

$$A_k f = \sum_{s=1}^{2n} \vartheta_{k,s} \frac{\partial f}{\partial x_s} + [1, \ldots, 2n] \frac{\partial f}{\partial x_{2n+k}} = 0.$$

4) Um die Normalform eines bedingungslosen Ausdruckes Ω_{2n+1}

mit $2n+1$ Variablen zu erhalten, hat man eine Reihe von Reductionen wie in § 152 auszuführen.

Es sei irgend ein Integral

$$g_1(x_1, \ldots, x_{2n+1}) = a_1$$

der einzigen Hülfsgleichung

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \frac{\partial f}{\partial x_i}[i+1, \ldots, i-1] = 0$$

gefunden und nach x_{2n+1} aufgelöst in der Form:

$$x_{2n+1} = \gamma_1(x_1, \ldots, x_{2n}, a_1).$$

Wird der aus dieser Gleichung sich ergebende Werth für x_{2n+1} in Ω_{2n+1} eingesetzt, so enthält der neue Ausdruck nur $2n$ Variablen und seine Normalform $2n-1$ Functionen. Wendet man auf diesen neuen Ausdruck eine einzige Cauchy'sche Substitution an, wie oben, so erhält man einen Ausdruck Ω_{2n-1} mit $2n-1$ Variablen, dessen Normalform $2n-1$ Functionen enthält, d. h. einen Ausdruck, welcher keiner Bedingung unterliegt. Diese Gruppe von Operationen, vermöge deren wir im Stande sind von Ω_{2n+1} zu Ω_{2n-1} überzugehen, kann eine Reduction von der Ordnung $2n+1$ genannt werden.

5) Wird eine Reduction von der Ordnung $2n+1$ auf Ω'_{2n+1} von (1) angewendet, so gelangt man zu Ω'_{2n-1}; eine Reduction von der Ordnung $2n-1$ auf Ω'_{2n-1} angewendet, führt zu Ω'_{2n-3} u. s. w., bis man zu Ω_1' kommt, welches ein vollkommenes Differential ist. Alsdann führen endliche Operationen zu den Normalformen von Ω_3', Ω_5', $\ldots$, Ω'_{2n+1} und somit nach (2) zu der Normalform von Ω_{2n+q}.

Beispiel. Als eine unmittelbare Folgerung der Lie'schen Methode für einen Pfaff'schen Ausdruck ergiebt sich ein Verfahren zur Integration einer exacten Gleichung.

Es sei

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\, dx_i = 0$$

eine exacte Gleichung, so dass der Differentialausdruck auf der linken Seite auf die Form $\Theta\, d\vartheta$ gebracht werden kann. Wendet man die Substitutionen

$$x_r = \alpha_r + (x_2 - \alpha_2)\, y_r$$

für $r = 3, \ldots, m$ an, so nimmt der Ausdruck die Form an:

$$Y_1\, dx_1 + Y_2\, dx_2.$$

Es sei:

$$Y_1 dx_1 + Y_2 dx_2 = \Phi d\varphi,$$

wo φ und Φ Functionen von x_1, x_2 und der Grössen α und y sind. Löst man dann die Gleichung

$$\varphi(x_1, x_2, y_3, \ldots, y_m) = \varphi(\alpha_1, h, y_3, \ldots, y_m)$$

nach h auf und eliminirt die Grössen y aus dem Ausdruck, so folgt unmittelbar aus der allgemeinen Theorie, dass

$$\sum_{i=1}^{m} X_i dx_i = H dh$$

ist, wo H eine gewisse Function ist, die sogleich aus irgend einer der Gleichungen

$$X_s = H \frac{\partial h}{\partial x_s}$$

bestimmt werden kann. Demnach wird ein Integral der Gleichung gegeben durch

$$h = \text{const.},$$

und diesem sind sämmtliche Integrale äquivalent (§ 3).

11. Kapitel.

Methode von Frobenius.

Die Untersuchungen von Frobenius über die Formulirung und Auflösung des Pfaff'schen Problems*) beschäftigen sich mehr mit der allgemeinen Theorie der Reduction des Differentialausdrucks auf eine Normalform als mit der Integration der bei der Reduction auftretenden Gleichungen und das Interesse an denselben liegt hauptsächlich in dem rein algebraischen Zusammenhange der Anzahl der Glieder in der reducirten Form mit den von den Coefficienten des ursprünglichen Ausdrucks befriedigten kritischen Bedingungen, deren Anzahl und Form dieselbe ist wie bei der Natani'schen Methode.

§ 155.

Der Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} X_i\, dx_i$ gehe in $\sum_{i=1}^{n} X_i'\, dx_i'$ über mit Hülfe der Transformationsgleichungen:

$$x_i = x_i(x_1', \ldots, x_n'),$$

so dass, wenn $x_{i,j}$ den Quotienten $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}$ bezeichnet, die Differentialelemente durch die linearen Relationen verbunden sind:

$$dx_\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha,i}\, dx_i' \qquad (\alpha = 1, \ldots, n).$$

In der Gleichung

*) Der Hauptheil seiner Darlegung ist enthalten in der Abhandlung „Ueber das Pfaff'sche Problem", Crelle's J. Bd. 82 (1877) S. 230—315; andere Erweiterungen wurden von ihm in einer andern Abhandlung „Ueber homogene totale Differentialgleichungen", Crelle's J. Bd. 86 (1879) S. 1—19 gegeben.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\, dx_i = \sum_{i=1}^{n} X_i'\, dx_i'$$

sind die Variationen dx (und daher ebenfalls die Variationen dx') willkürlich und, soweit die Variationen in Betracht kommen, von einander unabhängig, so dass, wenn δx (und somit $\delta x'$) andere Variationen sind, ebenfalls die Gleichung gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\, \delta x_i = \sum_{i=1}^{n} X_i'\, \delta x_i'.$$

Nehmen wir nun die Variationen eines jeden dieser beiden Paare gleicher Grössen in der Form

$$\delta \sum_{i=1}^{n} (X_i\, dx_i) = \delta \sum_{i=1}^{n} (X_i'\, dx_i')$$

$$d \sum_{i=1}^{n} (X_i\, \delta x_i) = d \sum_{i=1}^{n} (X_i'\, \delta x_i')$$

so erhalten wir:

$$\delta \sum_{i=1}^{n} X_i\, dx_i - d \sum_{i=1}^{n} X_i\, \delta x_i = \delta \sum_{i=1}^{n} X_i'\, dx_i' - d \sum_{i=1}^{n} X_i'\, \delta x_i';$$

oder, da wegen der Willkürlichkeit der Variationen

$$d \delta x = \delta d x$$

ist, so folgt

$$\sum_{i=1}^{n} (\delta X_i\, dx_i - dX_i\, \delta x_i) = \sum_{i=1}^{n} (\delta X_i'\, dx_i' - dX_i'\, \delta x_i')$$

und daher:

$$\sum_{i,j} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\, dx_i\, \delta x_j - \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\, dx_j\, \delta x_i \right) = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial X_i'}{\partial x_j'}\, \delta x_j'\, dx_i' - \frac{\partial X_i'}{\partial x_j'}\, dx_j'\, \delta x_i' \right),$$

somit:

$$\sum_{i,j} a_{i,j}\, dx_i\, \delta x_j = \sum_{i,j} a_{i,j}'\, dx_i'\, \delta x_j'$$

und diese Gleichung ist eine nothwendige Folge der ursprünglichen Gleichung zwischen den Variationen. Demnach ist der Ausdruck

$$\sum_{i,j} a_{i,j}\, dx_i\, \delta x_j$$

eine dem ursprünglichen Differentialausdruck associirte bilineare Covariante.

Nimmt man eine dritte Variation Δx, welche von den beiden bereits angewendeten verschieden und unabhängig ist, und gehen wir wie oben von den Gleichungen aus

$$\Delta \sum a_{i,j}\, dx_i\, \delta x_j = \Delta \sum a'_{i,j}\, dx'_i\, \delta x'_j$$

$$\delta \sum a_{i,j} \Delta x_i\, dx_j = \delta \sum a'_{i,j} \Delta x'_i\, dx'_j$$

$$d \sum a_{i,j}\, \delta x_i \Delta x_j = d \sum a'_{i,j}\, \delta x'_i \Delta x'_j,$$

so ist, wenn man sie zu einer trilinearen Covariante combinirt, der Coefficient von $dx_i\, \delta x_j \Delta x_k$

$$\frac{\partial a_{i,j}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{j,k}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{k,i}}{\partial x_j}$$

und daher gleich Null. Demnach verschwindet die trilineare Covariante für den Pfaff'schen Ausdruck und ebenso alle nachfolgenden mehrlinearen Covarianten*). Wir brauchen daher nur den linearen Ausdruck

$$\sum X\, dx$$

(welcher zugleich $\sum X\, \delta x$ in sich enthält) und den bilinearen Ausdruck

$$\sum a_{i,j}\, dx_i\, \delta x_j,$$

welche beide Covarianten vom Index Null sind, zu betrachten.

Das ursprüngliche System linearer und bilinearer Ausdrücke wird dem transformirten System äquivalent genannt.

§ 156.

Ersetzt man nun dx_i durch u_i und δx_i durch v_i, so dass die u und v zwei Systeme von Variablen sind, die unabhängig von einander sind und durch die nämlichen Substitutionen

$$u_\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha,i}\, u'_i$$

transformirt werden, so sind die ursprünglichen Formen:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha u_\alpha$$

$$\sum_{i,j} a_{i,j}\, u_i v_j.$$

---

*) In Betreff bilinearer Ausdrücke und zugehöriger Covarianten, die mit den linearen Pfaff'schen Functionen in keinem Zusammenhange stehen, vgl. Christoffel, Crelle's J. Bd. 70 (1869) S. 46—70, Lipschitz ebenda S. 71—102.

Werden dieselben den vorstehenden linearen Transformationen unterworfen, so nehmen sie die analogen und äquivalenten Formen an:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha' u_\alpha'$$

$$\sum_{i,j} a_{i,j}' u_i' v_j' ,$$

wo

$$X_\alpha' = \sum_{i=1}^{n} x_{i,\alpha} X_i$$

$$a_{i,j}' = \sum_{\alpha,\beta}^{n} x_{\alpha,i} x_{\beta,j} a_{\alpha,\beta} .$$

Wir haben daher eine bloss algebraische Transformation zwischen äquivalenten Systemen zweier simultanen Formen.

Betrachten wir nun die umgekehrte Frage und nehmen wir an, dass zwei simultane Formen

$$\sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha' u_\alpha' , \qquad \sum_{i,j} a_{i,j}' u_i' v_j'$$

den beiden Formen

$$\sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha u_\alpha , \qquad \sum_{i,j} a_{i,j} u_i v_j$$

äquivalent sind, so müssen wir zunächst alle algebraischen Transformationen suchen, welche diese Aequivalenz möglich machen. Indessen folgt nicht, dass eine solche algebraische Transformation zu einer Differentialtransformation führt, welche die Gleichung giebt:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i dx_i = \sum_{i=1}^{n} X_i' dx_i' .$$

Die algebraische Transformation ist für unsern Zweck nur dann von Nutzen, wenn die Ausdrücke für die Differentialelemente dx auch für die aus derselben abgeleiteten Differentialtransformationen vollkommene Differentiale bleiben. Ist dies der Fall, so ergiebt sich nothwendig wieder die bilineare Differentialcovariante.

Es ergiebt sich daher, dass, um die Transformation eines Pfaffschen Ausdrucks nach dieser Methode auszuführen, die Untersuchung in zwei Theile zerfällt; der eine, rein algebraische, ist die Ableitung sämmtlicher Substitutionen, welche ein System von zwei Formen

$$\sum_{i=1}^{n} X_i u_i, \qquad \sum_{i,j} a_{i,j} u_i v_j$$

in ein äquivalentes System verwandeln, der andere ist eine Untersuchung der analytischen Eigenschaften solcher Transformationen, wenn dieselben in differentiale Substitutionen verwandelt werden.

§ 157.

Werden die linearen Substitutionen in der bilinearen Form

$$W = \sum_{i,j}^{n} a_{i,j} u_i v_j$$

ausgeführt, um dieselbe in

$$W' = \sum_{i,j}^{n} a'_{i,j} u'_i v'_j$$

zu transformiren, so sind die Coefficienten der beiden Formen durch die Relationen verbunden

$$a'_{i,j} = \sum_{\alpha,\beta}^{n} x_{\alpha,i} x_{\beta,j} a_{\alpha,\beta},$$

und jede Determinante m^{ter} Ordnung in den Coefficienten $a'_{i,j}$ ist eine homogene lineare Function der m^{ten} Ordnung in den Coefficienten $a_{i,j}$.

Die Umkehrung dieser Beziehung findet statt, wenn die umgekehrten Substitutionen auf W' angewendet werden.

Demnach verschwinden die Determinanten jeder Ordnung in den Coefficienten $a'_{i,j}$ gleichzeitig mit denjenigen der nämlichen Ordnung in den Coefficienten $a_{i,j}$ und daher ist die höchste Ordnung, für welche die Determinanten der Coefficienten nicht verschwinden, dieselbe sowohl für den transformirten wie für den gegebenen bilinearen Ausdruck, d. h. die höchste Ordnung der nicht verschwindenden Determinanten der Coefficienten ist eine Invariante für die linearen Substitutionen.

Um die simultane Transformation der Formen

$$\sum_{i,j}^{n} a_{i,j} u_i v_j, \quad \sum_{i=1}^{n} X_i u_i, \quad \sum_{i=1}^{n} X_i v_i$$

zu behandeln, ist es zweckmässig, eine neue bilineare Form zu bilden:

$$\Theta = \sum_{i,j}^{n} a_{i,j} u_i v_j + v_{n+1} \sum_{i=1}^{n} X_i u_i + u_{n+1} \sum_{i=1}^{n} X_i v_i + A u_{n+1} v_{n+1},$$

in welcher A eine willkürliche sich nicht ändernde Grösse bezeichnet und die neuen Variablen den Transformationen

$$u_{n+1} = u'_{n+1}, \quad v_{n+1} = v'_{n+1}$$

unterworfen werden. Alsdann ist die Ordnung der höchsten nicht verschwindenden Determinanten in den Coefficienten von Θ eine Invariante für die linearen Substitutionen.

§ 158.

Nun sind alle diese Determinanten Minoren der vollständigen Determinante von der Ordnung n (im zweiten Falle von der Ordnung $n+1$), welche sämmtliche Coefficienten enthält, und somit giebt es im vorliegenden Falle zwei invariante ganze Zahlen. Die erste, z. B. m, ist die Ordnung des höchsten nicht verschwindenden Minors in der schiefen Determinante

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Die zweite Zahl, z. B. m', ist die Ordnung des höchsten nicht verschwindenden Minors in der Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n}, & X_1 \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n}, & X_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n}, & X_n \\ X_1, & X_2, & \ldots, & X_n, & A \end{vmatrix},$$

wo A willkürlich ist. Nun hängt aber diese Ordnung nicht ab von dem Werthe der willkürlichen Grösse und muss dieselbe sein, welcher Werth auch immer der Grösse A beigelegt werden mag. Nehmen wir diesen Werth gleich Null an und verändern wir die Vorzeichen sämmtlicher Glieder in der letzten Zeile, um die Determinante auch explicit als schiefe Determinante darzustellen, so erhalten wir die zweite invariante ganze Zahl m' als die Ordnung des höchsten nicht verschwindenden Minors in der schiefen Determinante:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n}, & X_1 \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n}, & X_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,n}, & X_n \\ -X_1, & -X_2, & \ldots, & -X_n, & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Zahlen m und m' müssen gerade sein. Denn unter den nichtverschwindenden Minoren dieser Ordnungen muss es Hauptminoren geben, welches schiefe Determinanten sind, da Δ_1 und Δ_2 solche schiefe Determinanten sind. Irgend eine derselben für Δ_1 sei:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \cdots, & a_{1,m} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \cdots, & a_{2,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1}, & a_{m,2}, & \cdots, & a_{m,m} \end{vmatrix},$$

dann muss ihre Ordnung gerade sein, und daher bezeichnen wir m, die zu Δ_1 gehörige invariante ganze Zahl, mit $2r$. Analoges gilt für m', die invariante zu Δ_2 gehörige ganze Zahl. Nun kann m' nicht kleiner sein als $2r$ und es kann nicht grösser sein als $2r+2$, da sonst alle Determinanten von einer höheren Ordnung als $m+2$ nicht verschwindende Minoren von einer höheren Ordnung als m haben würden, die zu gleicher Zeit Minoren von Δ_1 wären.

Wenn alle Unterdeterminanten in Δ_2 von der Ordnung $2r+2$ verschwinden, so verschwinden auch alle von der Ordnung $2r+1$, so dass m', wenn es nicht gleich $2r+2$ ist, gleich $2r$ sein muss, da nach der Voraussetzung über Δ_1 die Minoren von Δ_2 von der Ordnung $2r$ nicht sämmtlich verschwinden können.

Somit ergeben sich zwei Fälle:

1) Während die invariante Zahl von Δ_1 $2r$ ist, ist die von Δ_2 $2r+2$;
2) während die invariante Zahl von Δ_1 $2r$ ist, ist die von Δ_2 $2r$.

Wenn wir, anstatt die beiden invarianten Zahlen jedes der Fälle zu betrachten, nur ihr arithmetisches Mittel betrachten, so reicht dies Mittel aus, um die beiden Zahlen zu bestimmen. Denn ist dasselbe eine gerade Zahl, so sind die beiden invarianten Zahlen gleich und es findet der zweite Fall statt; und ist das Mittel eine ungerade Zahl, so sind die beiden invarianten Zahlen ungleich und es findet der erste Fall statt. Hiernach braucht man nur eine einzige invariante Zahl p, nämlich das arithmetische Mittel der zu Δ_1 und Δ_2 respective gehörigen invarianten Zahlen zu betrachten*).

*) Man kann aus den Natani'schen Bedingungen (§§ 99, 100) leicht folgern, dass, wenn p gerade ist, in der Normalform eines Pfaff'schen Ausdrucks eine gerade Anzahl p von unabhängigen Functionen vorkommen, und dass, wenn p ungerade ist, die Normalform eine ungerade Anzahl p solcher Functionen ent-

Die Invarianz der ganzen Zahl p ist eine nothwendige Folge aus der Aequivalenz zweier Systeme von Formen; wir wollen nun dazu übergehen zu zeigen, dass sie auch eine hinreichende Bedingung für deren Aequivalenz ist, indem wir (auf Grund der Voraussetzung der Invarianz) die Transformationsgleichungen herleiten.

§ 159.

Es seien $z_1, z_2, \ldots, z_k$ k unabhängige Functionen von $x_1, \ldots, x_n$, welche durch die (bisher unbekannten) Transformationen übergehen in $z_1', z_2', \ldots, z_k'$. Alsdann verwandelt sich der Ausdruck

$$x_0 \sum_{i=1}^{n} X_i \, dx_i + \sum_{i=1}^{k} x_{n+i} \, dz_i \quad \text{oder etwa} \quad \sum_{i=0}^{n+k} Y_i \, dx_i$$

durch diese Transformationen in Verbindung mit

$$x_0' = x_0, \qquad x_{n+i}' = x_{n+i}$$

in

$$x_0' \sum_{i=1}^{n} X_i' \, dx_i' + \sum_{i=1}^{k} x_{n+i}' \, dz_i' \quad \text{oder etwa in} \quad \sum_{i=0}^{n+k} Y_i' \, dx_i' .$$

Demnach giebt es eine invariante ganze Zahl, welche die Ordnung der höchsten nichtverschwindenden Minoren der zu dem Ausdruck $\sum Y dx$ gehörigen Determinante ist.

Nun ist

$$Y_0 = 0, \quad Y_{n+i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k),$$

$$Y_r = x_0 X_r + \sum_{i=1}^{k} x_{n+i} \frac{\partial z_i}{\partial x_r} \; (r = 1, \ldots, n),$$

und somit ist die Determinante, wenn wir die Elemente der zugehörigen Determinante in der Form:

$$\frac{\partial Y_s}{\partial x_t} - \frac{\partial Y_t}{\partial x_s}$$

$$(s, t = 0, 1, \ldots, n + k)$$

nehmen:

---

hält. Die Verbindung dieser Natani'schen Bedingungen mit dem von Frobenius erwiesenen invarianten Charakter von p leitet zu den Resultaten von Lie (§ 142) über die Unveränderlichkeit des Charakters einer Normalform.

$$\Delta_3' = \begin{vmatrix} x_0\, a_{1,1}, & \ldots, & x_0\, a_{1,n}, & X_1, & \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial z_k}{\partial x_1} \\ x_0\, a_{2,1}, & \ldots, & x_0\, a_{2,n}, & X_2, & \frac{\partial z_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial z_k}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_0\, a_{n,1}, & \ldots, & x_0\, a_{n,n}, & X_n, & \frac{\partial z_1}{\partial x_n}, & \ldots, & \frac{\partial z_k}{\partial x_n} \\ -X_1, & \ldots, & -X_n, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ -\frac{\partial z_1}{\partial x_1}, & \ldots, & -\frac{\partial z_1}{\partial x_n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\partial z_k}{\partial x_1}, & \ldots, & -\frac{\partial z_k}{\partial x_n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \end{vmatrix}.$$

Nichtverschwindende Determinanten, welche Unterdeterminanten von Δ_3' sind, sind von niedrigerer Ordnung als n, und alle diese enthalten irgend eine Potenz von x_0 als Factor und enthalten x_0 nur in dieser Form. Demnach können wir, soweit die Ordnung der nichtverschwindenden Minoren in Betracht kommt, $x_0 = 1$ setzen; die entsprechende Form von Δ_3' werde bezeichnet mit Δ_3, so dass also

$$\Delta_3 = \Delta_3' \quad \text{für} \quad x_0 = 1.$$

Die invariante Zahl von Δ_2 sei $m\,(= 2r)$, so dass die invariante Zahl von Δ_1 entweder $2r$ oder $2r - 2$ ist. Alsdann ist die invariante Zahl von Δ_3 im Allgemeinen grösser als $2r$, so lange die Functionen z vollkommen willkürlich sind. Dieselbe kann aber verkleinert werden, wenn man die Grössen z derart bestimmt, dass sie den partiellen Differentialgleichungen genügen, welche die Bedingungen für die Erniedrigung der höchsten Ordnung der nicht verschwindenden Minoren sind. Sie kann aber nicht unter $2r$ herabgedrückt werden infolge der Voraussetzung, welche hinsichtlich Δ_2 gemacht worden ist, und daher können wir annehmen, dass die invariante Zahl von Δ_3 gleich $2r$, also dieselbe ist wie die von Δ_2. Es genügen somit $z_1, \ldots, z_k$ einer Anzahl von partiellen Differentialgleichungen und wir gehen nun dazu über, die grösstmögliche Anzahl von Functionen z zu bestimmen, für welche die invariante Zahl der associirten Determinante Δ_3 dieselbe wird wie die von Δ_2, nämlich gleich $2r$.

§ 160.

Wir nehmen also an, dass k von einander unabhängige Functionen z von solcher Beschaffenheit gefunden seien (k kann auch Null sein), dass sämmtliche Unterdeterminanten von Δ_3 von der Ordnung $m+1$, aber nicht sämmtliche von niedrigerer Ordnung verschwinden, so dass m die invariante Zahl von Δ_3 ist. Wird eine Determinante, ähnlich Δ_3 aber $k+1$ Functionen z enthaltend, gebildet in der Form:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,n}, & X_1, & \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial z_{k+1}}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,n}, & X_n, & \frac{\partial z_1}{\partial x_n}, & \ldots, & \frac{\partial z_{k+1}}{\partial x_n} \\ -X_1, & \ldots, & -X_n, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ -\frac{\partial z_1}{\partial x_1}, & \ldots, & -\frac{\partial z_1}{\partial x_n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\partial z_{k+1}}{\partial x_1}, & \ldots, & -\frac{\partial z_{k+1}}{\partial x_n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \end{vmatrix}$$

so ist, wenn ihre invariante Zahl $2r$ d. i. die nämliche wie die von Δ_2 sein soll, nothwendig und hinreichend, dass z_{k+1} den linearen Gleichungen

$$u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + u_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{1}$$

für alle Werthe der Grössen u genügt, durch welche die Relationen

$$(2) \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{r,i} u_i + X_r u + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial z_j}{\partial x_r} u_{n+j} = 0 & (r = 1, \ldots, n) \\ \sum_{i=1}^{n} X_i u_i = 0 & \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z_j}{\partial x_i} u_i = 0 & (j = 1, \ldots, k) \end{cases}$$

befriedigt werden können. Mit Rücksicht aber darauf, dass die Unterdeterminanten von Δ_2 oder Δ_2' von höherer Ordnung als m verschwinden, und auf die daraus folgende functionale Abhängigkeit der

Gleichungen (2) von einander folgt, dass sämmtliche Werthe der Grössen u, infolge deren die Gleichungen (2) befriedigt werden können, auch die Erfüllung der Gleichungen

$$(2') \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_0 a_{r,i} u_i + X_r u + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial z_j}{\partial x_r} u_{n+j} = 0 & (r = 1, \ldots, n) \\ \sum_{i=1}^{n} X_i u_i = 0 & \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z_j}{\partial x_i} u_i = 0 & (j = 1, \ldots, k) \end{cases}$$

möglich machen. Und jetzt genügt die neue Grösse z_{k+1} dem System der Differentialgleichungen (1) für alle Werthe der Grössen u, welche den Bedingungen (2′) genügen.

§ 161.

Wenn wir nun den invarianten Charakter der Determinanten Δ_1, Δ_2, Δ_3 und die Beziehungen der linearen und bilinearen Form zur Pfaff'schen Function und zu ihrer bilinearen Covariante berücksichtigen und wenn wir beachten, dass diese Determinanten Eliminanten von Grössen von der Form $\frac{\partial W}{\partial u_i}$ $\left(\text{oder von Grössen von der Form } \frac{\partial W}{\partial v_j}\right)$ sind, wo W eine bilineare Form ist, so sehen wir, dass die Bedingungen des § 156 folgendermassen erfüllt werden können. Es ist nothwendig, dass rein algebraische Transformationen, nachdem dieselben in Substitutionen für die ursprüngliche Pfaff'sche Function umgeändert sind, Elemente dx liefern, welche, weil sie vollständige Differentiale sind, zu Integral-Substitutionsgleichungen für die Pfaff'sche Gleichung führen; und dies wird ausgeführt sein, wenn wir in den Gleichungen (1) und den Relationen (2′) wirklich die Variablen u durch Differentialelemente dx ersetzen, wobei diese Elemente als vollständige Differentiale vorausgesetzt werden.

Wird diese Aenderung ausgeführt, so ergiebt sich als Resultat des § 160, dass z_{k+1} der Gleichung

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0$$

genügt für alle Variationen dx, welche mit den Gleichungen

$$
\text{(II)} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_0 a_{r,i} dx_i + X_r dx_0 + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial z_j}{\partial x_r} dx_{n+j} = 0 & (r = 1, \ldots, n) \\ \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i = 0 & \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z_j}{\partial x_i} dx_i = 0 & (j = 1, \ldots, k) \end{cases}
$$

verträglich sind.

Die anfängliche Voraussetzung besagte, dass sämmtliche Functionen z Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ allein sein sollen; daher nimmt Gleichung (I) die Form an:

$$dz_{k+1} = 0$$

oder es ist z_{k+1} ein Integral des Gleichungssystems (II). Ferner ist aus demselben Grunde klar, dass die aus den letzten k Gleichungen von (II) abgeleiteten Werthe $z_1, \ldots, z_k$ ebenfalls Integrale sind. Betrachten wir demnach die Gleichungen (II) als ein zu integrirendes System von Gleichungen, so sind die Functionen z Integrale dieses Systems.

Die Coefficienten der Differentialelemente auf den linken Seiten der Gleichungen (II) sind die verschiedenen Grössen

$$\frac{\partial Y_r}{\partial x_s} - \frac{\partial Y_s}{\partial x_r},$$

wo Y_r und Y_s (für $r, s = 0, 1, \ldots, n + k$) irgend zwei der Coefficienten eines Pfaff'schen Ausdrucks $\sum_{i=0}^{n+k} Y_i dx_i$ sind, und daher ist das System (Beispiel § 31) vollständig. Da ferner die Minoren von der Ordnung m in der Determinante der linken Seiten nicht sämmtlich verschwinden, während dagegen alle Minoren von höherer Ordnung als m verschwinden, so giebt es m (und nicht mehr als m) von einander unabhängige Gleichungen und somit ist das System einem exacten System von m Gleichungen äquivalent. Daher hat das System (II) m unabhängige Integrale.

Die Functionen z sollen nur die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ enthalten; das System (II) enthält nicht allein diese Variablen, sondern auch $x_0, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$; die Integrale des Systems müssen daher das ganze System der Veränderlichen enthalten. Die m unabhängigen Integrale können durch m von einander unabhängige functionale Com-

binationen derselben ersetzt werden, und wenn wir diese functionalen Combinationen derart wählen, dass dieselben die grösstmögliche Anzahl von Gleichungen, die frei von den Veränderlichen

$$x_0, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$$

sind, umfassen, so haben wir $m-k-1$ von einander unabhängige und nur die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und constante Grössen enthaltende Gleichungen und $k+1$ von einander unabhängige Gleichungen, welche nur die Variablen $x_0, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$ enthalten. Nun führt jede von diesen zu einem Integral von (II), d. h. zu einer Function z von solcher Beschaffenheit, dass infolge der Gleichungen (II) und des Integralsystems dieser Gleichungen

$$dz = 0$$

ist. Es giebt daher $m-k-1$ von einander unabhängige Integrale des Systems (II), welche nur die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ enthalten und daher von der Art der Functionen z sind.

Es ist aber vorausgesetzt, dass k solche Functionen z gefunden seien, welche Voraussetzung durch die letzten k Gleichungen von (II) ausgedrückt ist; demnach giebt es noch $(m-k-1)-k$, d. i. $m-2k-1$ weitere Integrale von der gewünschten Art. Ist $m=2r$ und $k=r-1$ (so dass $r-1$ Integrale als bekannt angenommen werden), so ist der Werth von $m-2k-1$ gleich 1 und somit kann ein weiteres Integral gefunden werden. Hieraus folgt, dass man r unabhängige Functionen $z_1, \ldots, z_r$ von solcher Art finden kann, dass alle Minoren von einer höheren Ordnung als $2r$ in der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,n}, & X_1, & \dfrac{\partial z_1}{\partial x_1}, & \ldots & \dfrac{\partial z_r}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,n}, & X_n, & \dfrac{\partial z_1}{\partial x_n}, & \ldots, & \dfrac{\partial z_r}{\partial x_n} \\ -X_1, & \ldots, & -X_n, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ -\dfrac{\partial z_1}{\partial x_1}, & \ldots, & -\dfrac{\partial z_1}{\partial x_n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\dfrac{\partial z_r}{\partial x_1}, & \ldots, & -\dfrac{\partial z_r}{\partial x_n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \end{vmatrix}$$

verschwinden.

§ 162.

Da sämmtliche Unterdeterminanten von höherer als der $2r^{\text{ten}}$ Ordnung verschwinden, so folgt, dass unter andern auch sämmtliche Hauptminoren von der Ordnung $2r+2$ gleich Null sind. Ist dann $\alpha, \ldots, \varepsilon$ irgend ein System von $r+1$ Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$, so ist eine solche Unterdeterminante

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha,\alpha}, \ldots, a_{\alpha,\varepsilon}, & X_\alpha, \frac{\partial z_1}{\partial x_\alpha}, \ldots, \frac{\partial z_r}{\partial x_\alpha} \\ \cdots & \cdots \\ a_{\varepsilon,\alpha}, \ldots, a_{\varepsilon,\varepsilon}, & X_\varepsilon, \frac{\partial z_1}{\partial x_\varepsilon}, \ldots, \frac{\partial x_r}{\partial x_\varepsilon} \\ -X_\alpha, \ldots, -X_\varepsilon, & 0, \; 0, \ldots, 0 \\ -\frac{\partial z_1}{\partial x_\alpha}, \ldots, -\frac{\partial z_1}{\partial x_\varepsilon}, & 0, \; 0, \ldots, 0 \\ \cdots & \cdots \\ -\frac{\partial z_r}{\partial x_\alpha}, \ldots, -\frac{\partial z_r}{\partial x_\varepsilon}, & 0, \; 0, \ldots, 0 \end{vmatrix},$$

und deren Werth ist das Quadrat der Determinante:

$$\begin{vmatrix} X_\alpha, \ldots, X_\varepsilon \\ \frac{\partial z_1}{\partial x_\alpha}, \ldots, \frac{\partial z_1}{\partial x_\varepsilon} \\ \cdots \\ \frac{\partial z_r}{\partial x_\alpha}, \ldots, \frac{\partial z_r}{\partial x_\varepsilon} \end{vmatrix}.$$

Es verschwinden somit sämmtliche Minoren für die einzelnen Combinationen von $r+1$ verschiedenen Zahlen aus der Reihe $1, \ldots, n$, d. h. es verschwinden sämmtliche Determinanten $r+1^{\text{ten}}$ Grades, welche aus dem System

$$\ldots \begin{Vmatrix} X_1, & X_2, & \ldots, & X_n \\ \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial z_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \cdots & & & \\ \frac{\partial z_r}{\partial x_1}, & \frac{\partial z_r}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial z_r}{\partial x_n} \end{Vmatrix} \ldots$$

gebildet werden können. Somit kann man r Grössen, z. B. $Z_1, \ldots, Z_r$, derart bestimmen, dass die n Gleichungen

$$X_s = \sum_{i=1}^{r} Z_i \frac{\partial z_i}{\partial x_s}$$

für $s = 1, 2, \ldots, n$ befriedigt sind, und aus diesen erhalten wir:

$$\sum_{s=1}^{n} X_s dx_s = \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} Z_i \frac{\partial z_i}{\partial x_s} dx_s$$
$$= \sum_{i=1}^{r} Z_i dz_i,$$

da z_i eine Function von $x_1, \ldots, x_n$ ist und die Grössen dx vollkommene Differentiale sind.

Da ferner nicht sämmtliche Hauptunterdeterminanten von niedrigerer Ordnung als $2r+2$ verschwinden, so lässt sich kein System von Relationen der Form

$$X_s = \sum_{i=1} Z_i \frac{\partial z_i}{\partial x_s}$$

mit weniger als r Functionen z aufstellen und daher können wir keine Transformation von $\sum_{s=1}^{n} X_s dx_s$ erhalten, welche weniger als r Differentialelemente dz enthielte.

§ 163.

Bisher haben wir die einzige Voraussetzung (§ 159) benutzt, dass die invariante Zahl von Δ_2 gleich $2r$ ist; wir müssen nun die invariante Zahl von Δ_1 betrachten, welche entweder $2r$ oder $2r-2$ sein kann. Die beiden Fälle sollen der Reihe nach durchgenommen werden.

§ 164.

(1.) Die invariante Zahl von Δ_1 sei $2r$, so dass die Minoren der Ordnung $2r$ in Δ_1 nicht sämmtlich verschwinden. Nun ist:

$$a_{i,j} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i}$$
$$= \sum_{s=1}^{r} \left(\frac{\partial Z_s}{\partial x_j} \frac{\partial z_s}{\partial x_i} - \frac{\partial Z_s}{\partial x_i} \frac{\partial z_s}{\partial x_j} \right)$$

nach den oben für X_s erhaltenen Werthen; und daher werden die Minoren der Ordnung $2r$ von Δ_1 erhalten, indem man irgend eine Determinante von der Ordnung $2r$ des Systems

$$\cdots \left\| \frac{\partial z_1}{\partial x_s}, \ldots, \frac{\partial z_r}{\partial x_s}, \frac{\partial Z_1}{\partial x_s}, \ldots, \frac{\partial Z_r}{\partial x_s} \right\| \cdots$$

mit einer Determinante von der Ordnung $2r$ des Systems

$$\cdots \left\| \frac{\partial Z_1}{\partial x_t}, \ldots, \frac{\partial Z_r}{\partial x_t}, -\frac{\partial z_1}{\partial x_t}, \ldots, -\frac{\partial z_r}{\partial x_t} \right\| \cdots$$

für $s, t = 1, 2, \ldots, n$ multiplicirt. Da nun die Producte nicht sämmtlich verschwinden, so sind die Determinanten der Ordnung $2r$ dieser Systeme nicht sämmtlich Null und daher sind die Grössen $z_1, \ldots, z_r, Z_1, \ldots, Z_r$ von einander unabhängig.

Aus der Invarianz der beiden zu Δ_1 und Δ_2 gehörigen Zahlen, deren jede gleich $2r$ ist, folgt, dass ein Ausdruck $\sum_{s=1}^{n} X_s' dx_s'$, welcher aus dem Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} X_s dx_s$ durch die (unbekannten) Transformationsgleichungen abgeleitet ist, dargestellt werden kann in der Form:

$$\sum_{i=1}^{r} Z_i' dz_i',$$

wo die $2r$ Grössen $z_1', \ldots, z_r', Z_1', \ldots, Z_r'$ unabhängig von einander sind, und dieses Resultat ist, um es nochmals zu betonen, eine Folge der gleichzeitigen Invarianz der beiden ganzen Zahlen. Diese beiden Zahlen können aber, wie in § 158 auseinandergesetzt ist, durch die einzige invariante Zahl p, ihr arithmetisches Mittel, welches in diesem Falle gleich $2r$ ist, ersetzt werden.

Da die $2r$ Grössen z und Z unabhängig von einander sind, ebenso auch die $2r$ Grössen z' und Z', so sind die einfachsten Relationen, welche $\sum_{i=1}^{r} Z_i dz_i$ in $\sum_{i=1}^{r} Z_i' dz_i'$ transformiren, die folgenden:

$$z = z_i', \quad Z_i = Z_i'$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r).$$

Substituirt man für z, Z, z', Z' ihre respectiven Werthe ausgedrückt durch x und x', so erhalten wir Gleichungen, welche ausreichend sind, um die Gleichung zu geben:

$$\sum_{s=1}^{n} X_s dx_s = \sum_{s=1}^{n} X_s' dx_s',$$

und diese Gleichungen sind unter der Annahme erhalten,

dass die Invarianz der geraden Zahl $p = 2r$ bestehen bleibt. Diese ist somit eine genügende und nothwendige Bedingung für die Aequivalenz der beiden Ausdrücke.

§ 165.

(2.) Es sei zweitens die invariante Zahl von Δ_1 gleich $2r - 2$, so dass $p = 2r - 1$ ist. Dann verschwinden alle Minoren der Ordnung $2r$ von Δ_1, so dass auch, da dieselben wie vorher die Producte von Determinanten der Ordnung $2r$ des Systems

$$\ldots \left\| \frac{\partial z_1}{\partial x_s}, \ldots, \frac{\partial z_r}{\partial x_s}, \frac{\partial Z_1}{\partial x_s}, \ldots, \frac{\partial Z_r}{\partial x_s} \right\| \ldots$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n)$$

mit Determinanten derselben Ordnung des nämlichen, aber verschieden angeordneten Systems sind, sämmtliche Determinanten der Ordnung $2r$ dieses Systems Null sind. Demnach giebt es eine identische Functionalbeziehung zwischen den Grössen z und Z, und da die Grössen z von einander unabhängig sind, so muss mindestens eine der Grössen Z in der Relation vorkommen, welche somit genommen werden kann in der Form:

$$\varphi(z_1, \ldots, z_r, Z_1, \ldots, Z_r) = 0.$$

Aus der Invarianz der beiden resp. zu Δ_1 und Δ_2 gehörigen ganzen Zahlen $2r - 2$ und $2r$ folgt, dass ein Ausdruck $\sum_{s=1}^{n} X_s' dx_s'$, welcher aus dem Ausdruck $\sum_{s=1}^{n} X_s dx_s$ durch die (unbekannten) Transformationsgleichungen abgeleitet ist, dargestellt werden kann in der Form:

$$\sum_{i=1}^{r} Z_i' dz_i',$$

wo die r Grössen z' von einander unabhängig sind und unter den $2r$ Grössen z' und Z' eine identische Functionalbeziehung besteht, welche mindestens eine der Grössen Z' enthält. Da die Functionen X' nicht nothwendig (noch im Allgemeinen) dieselben Functionen der Variablen x' sind, wie die X von den Variablen x, so ist diese Relation nicht nothwendig von derselben Form wie die vorhergehende, und sie wird im Allgemeinen verschieden sein, etwa von der Form:

$$\psi(z_1', \ldots, z_r', \quad Z_1', \ldots, Z_r') = 0,$$

wo ψ verschieden von φ ist.

Infolge der Verschiedenheit dieser Functionalbeziehungen kann das System von Gleichungen

$$z_i = z_i', \quad Z_i = Z_i'$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r),$$

durch welches $\sum Z_i dz_i$ in $\sum Z_i' dz_i'$ transformirt werden würde, nicht bestehen*), und somit ist das Verfahren, welches zum Ziele führt, wenn die einzige Invariante p gerade ist, nicht nothwendig mehr erfolgreich in dem Falle, wo die einzige Invariante p ungerade ist.

§ 166.

Um ein zum Ziele führendes Verfahren in dem Falle zu erhalten, wo die einzige invariante Zahl eine ungerade Zahl ist, führen wir den Fall auf denjenigen einer invarianten Zahl zurück, welche die nächstniedrigere gerade Zahl ist. Dies erfordert, dass die zu Δ_1 gehörige ganze Zahl gleich $2r - 2$, also dieselbe ist wie vorher, die zu Δ_2 gehörige aber gleich $2r - 2$, d. h. kleiner als die ist, die wir vorher hatten. Daher kann Δ_1 ungeändert bleiben, während Δ_2 geändert werden muss.

Passende Transformationen werden erhalten, wenn wir die Coefficienten X um solche Decremente ändern, welche die Grössen $a_{i,j}$ ungeändert lassen, und daher ersetzen wir X_i durch eine neue Grösse:

$$X_i - \frac{\partial z}{\partial x_i},$$

wo z eine Function von $x_1, \ldots, x_n$ ist. Die Determinante Δ_1 wird durch diese Modification nicht geändert und daher ist die zu ihr gehörige invariante ganze Zahl noch $2r - 2$. Wir bestimmen die eingeführte Function z derart, dass die zu dem in die Form

$$\left|\begin{array}{cccc} a_{1,1} & , \ldots , & a_{1,n}, & X_1 - \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & , \ldots , & a_{n,n}, & X_n - \frac{\partial z}{\partial x_n} \\ -X_1 + \frac{\partial z}{\partial x_1}, & \ldots , & -X_n + \frac{\partial z}{\partial x_n}, & 0 \end{array}\right|$$

*) Das System hört auf mit sich im Widerspruch zu sein, wenn die Functionen φ und ψ dieselben sind. Insbesondere tritt dies ein, wenn $Z_m = 1$ und $Z_m' = 1$ ist. Vgl. § 126.

abgeänderten Δ_2 oder, wie wir diese bezeichnen wollen, zu ∇_2 gehörige Zahl gleich $2r-2$, d. h. die gerade Zahl ist, welche nächstniedriger ist als die zu Δ_2 gehörige Zahl.

Die Wirkung dieser Aenderung auf den Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} X_i dx_i$ besteht darin, dass derselbe ersetzt wird durch

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \frac{\partial z}{\partial x_i}\right) dx_i\,,$$

d. i. durch

$$\sum_{i=1}^{n} X_i dx_i - dz\,,$$

und wenn z der vorhergehenden Bedingung entsprechend bestimmt ist, so ist die einzige invariante Zahl des neuen Ausdrucks gerade und gleich $2(r-1)$, so dass wir nach der vorstehenden Gleichung haben:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i dx_i - dz = \sum_{s=1}^{r-1} Y_s dy_s\,,$$

wo die $2(r-1)$ Grössen y und Y von einander unabhängig sind, und dies ist die kleinste Anzahl von Grössen, welche auf der rechten Seite vorkommen können. Wie in § 162 ist:

$$X_i - \frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_{s=1}^{r-1} Y_s \frac{\partial y_s}{\partial x_i}$$

und

$$a_{i,j} = \sum_{s=2}^{r-1}\left(\frac{\partial Y_s}{\partial x_j}\frac{\partial y_s}{\partial x_i} - \frac{\partial Y_s}{\partial x_i}\frac{\partial y_s}{\partial x_j}\right).$$

Demnach werden die Minoren der Ordnung $2r$ von Δ_2, welches

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,n}, & X_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,n}, & X_n \\ -X_1, & \ldots, & -X_n, & 0 \end{vmatrix}$$

ist, erhalten, indem man irgend eine Determinante der Ordnung $2r$ des Systems

$$\ldots\left\|\begin{matrix} 0, & \frac{\partial z}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial y_{r-1}}{\partial x_1}, & \frac{\partial Y_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial Y_{r-1}}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & \frac{\partial z}{\partial x_n}, & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}, & \ldots, & \frac{\partial y_{r-1}}{\partial x_n}, & \frac{\partial Y_1}{\partial x_n}, & \ldots, & \frac{\partial Y_{r-1}}{\partial x_n} \\ 1, & 0, & 0, & \ldots & 0, & Y_1, & \ldots, & Y_{r-1} \end{matrix}\right\|\ldots$$

mit irgend einer Determinante der Ordnung $2r$ des Systems

$$\cdots \left\| \begin{array}{cccccccc} -\frac{\partial z}{\partial x_1}, & 0, & \frac{\partial Y_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial Y_{r-1}}{\partial x_1}, & -\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \ldots, & -\frac{\partial y_{r-1}}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\partial z}{\partial x_n}, & 0, & \frac{\partial Y_1}{\partial x_n}, & \ldots, & \frac{\partial Y_{r-1}}{\partial x_n}, & -\frac{\partial y_1}{\partial x_n}, & \ldots, & -\frac{\partial y_{r-1}}{\partial x_n} \\ 0, & 1, & Y_1, & \ldots, & Y_{r-1}, & 0, & \ldots, & 0 \end{array} \right\| \cdots,$$

welches dasselbe wie vorher, nur verschieden geordnet ist, multiplicirt. Da nun $2r$ die invariante zu Δ_2 gehörige Zahl ist, so dass also die Minoren der Ordnung $2r$ nicht sämmtlich verschwinden, so folgt, dass die Determinanten der Ordnung $2r$ des vorstehenden Systems nicht sämmtlich gleich Null sind, und daher sind die Functionen

$$z,\ y_1,\ \ldots,\ y_{r-1},\ Y_1,\ \ldots,\ Y_{r-1}$$

von einander unabhängig und so beschaffen, dass

$$\sum_{i=1}^{n} X_i dx_i = dz + \sum_{s=1}^{r-1} Y_s dy_s$$

ist.

Mit Rücksicht auf das Bestehenbleiben der Invarianz der zu Δ_1 und Δ_2 respective gehörigen Zahlen $2r-2$ und $2r$ folgt, dass ein Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} X_i' dx_i'$, welcher aus $\sum_{i=1}^{n} X_i dx_i$ durch die (unbekannten) Transformationsgleichungen abgeleitet ist, dargestellt werden kann in der Form:

$$dz' + \sum_{s=1}^{r-1} Y_s' dy_s',$$

wo die $2r-1$ Grössen $z', y_1', \ldots, y_{r-1}', Y_1', \ldots, Y_{r-1}'$ von einander unabhängig sind.

Da die $2r-1$ Grössen z, y, Y von einander unabhängig sind, ebenso wie auch die $2r-1$ Grössen z', y', Y', so sind die einfachsten Gleichungen, durch welche

$$dz + \sum_{i=1}^{r-1} Y_i dy_i \quad \text{in} \quad dz' + \sum_{i=1}^{r-1} Y_i' dy_i'$$

transformirt wird, die folgenden:

$$z = z', \quad y_i = y_i', \quad Y_i = Y_i'$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r-1).$$

Substituirt man für z, y, Y, z', y', Y' ihre respectiven Werthe ausgedrückt in x und x', so erhalten wir Beziehungsgleichungen, welche ausreichend sind, um die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\,dx_i = \sum_{i=1}^{n} X_i'\,dx_i'$$

zu geben, und diese Gleichungen sind erhalten unter der Voraussetzung, dass die Invarianz der ungeraden Zahl $p = 2r - 1$ bestehen bleibt. Diese Voraussetzung ist daher die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Aequivalenz der beiden Ausdrücke.

Demnach ist der in § 158 ausgesprochene Satz, dass die Aequivalenz der Ausdrücke durch die Existenz der invarianten Zahl p festgestellt wird, erwiesen.

§ 167.

Mit Rücksicht auf die fundamentale Wichtigkeit dieser Zahl classificirt Frobenius die Pfaff'schen Ausdrücke nach der zu ihnen gehörigen Zahl. Ein Ausdruck, welcher die Zahl p zu seiner invarianten Zahl hat, heisst von der p^{ten} Classe; die vorhergehende Untersuchung zeigt, dass in der reducirten dem Ausdruck äquivalenten Form, welche lautet

$$\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}p} Z_i\,dz_i \qquad \text{oder} \qquad dz + \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} Y_i\,dy_i,$$

je nachdem p gerade oder ungerade ist, p unabhängige Functionen vorkommen*).

§ 168.

Obwohl sich die gegenwärtige Methode hauptsächlich auf die allgemeine Theorie der Transformation eines Pfaff'schen Ausdrucks in einen andern und nicht eigentlich auf die Reduction eines solchen auf eine Normalform und das daraus sich ergebende Integralsystem bezieht, so bildet die Normalform doch einen wesentlichen Theil der Untersuchung, insofern sie zu der Bildung der kleinsten Anzahl unabhängiger Gleichungen, welche die Transformation ermöglichen, führt. Für die Lösung der partiellen Differentialgleichungen, welche die Differentialelemente der Normalform bestimmen, wird keine neue

*) Vergl. Anmerkung zu § 158.

Methode angegeben; die folgende summarische Angabe der Ableitung dieser Gleichungen dürfte indessen wohl zweckmässig sein.

Ist $2r$ die höchste Ordnung der nicht verschwindenden Minoren der Determinante:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,n}, & X_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,n}, & X_n \\ -X_1, & \ldots, & -X_n, & 0 \end{vmatrix},$$

dann ist entweder $2r$ oder $2r-2$ die höchste Ordnung der nichtverschwindenden Minoren der Determinante

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Das arithmetische Mittel p der zu den beiden Determinanten gehörigen Zahlen ist eine Invariante, welche die Classe des Pfaffschen Ausdrucks $\sum_{i=1}^{n} X_i dx_i$ bestimmt; in dem einen Falle ist p gerade und gleich $2r$, in dem andern ist p ungerade und gleich $2r-1$.

In dem Falle, wo $p = 2r$, ist die Normalform

$$\sum_{i=1}^{r} Z_i dz_i.$$

Die Grössen Z werden bestimmt aus irgend r unabhängigen Gleichungen des Systems

$$X_s = \sum_{i=1}^{r} Z_i \frac{\partial z_i}{\partial x_s},$$

und die Grössen z sind bestimmt durch die r Systeme partieller Differentialgleichungen, welche die Bedingungen ausdrücken, dass die Minoren der Ordnung $2r+2$ in der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{1,n}, & X_1, & \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial z_k}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}, & \ldots, & a_{n,n}, & X_n, & \frac{\partial z_1}{\partial x_n}, & \ldots, & \frac{\partial z_k}{\partial x_n} \\ -X_1, & \ldots, & -X_n, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ -\frac{\partial z_1}{\partial x_1}, & \ldots, & -\frac{\partial z_1}{\partial x_n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\partial z_k}{\partial x_1}, & \ldots, & -\frac{\partial z_k}{\partial x_n}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \end{vmatrix}$$

sämmtlich verschwinden. Die aufeinanderfolgenden Grössen z werden erhalten, indem man k der Reihe nach die Werthe $1, \ldots, r$ beilegt. Auf diese Weise können nicht mehr als r Grössen z bestimmt werden und die $2r$ Grössen Z und z sind functional von einander unabhängig.

In dem Falle, wo $p = 2r - 1$, ist die Normalform

$$dz + \sum_{i=1}^{r-1} Y_i dy_i.$$

Die Grössen Y werden bestimmt aus irgendwelchen $r - 1$ unabhängigen Gleichungen des Systems

$$X_s = \frac{\partial z}{\partial x_s} + \sum_{i=1}^{r-1} Y_i \frac{\partial y_i}{\partial x_s}.$$

Die Grösse z wird bestimmt durch das System partieller Differentialgleichungen, welche die Bedingungen ausdrücken, dass die Minoren der Ordnung $2r$ in der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & , \ldots, & a_{1,n} & , X_1 - \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & , \ldots, & a_{n,n} & , X_n - \frac{\partial z}{\partial x_n} \\ -X_1 + \frac{\partial z}{\partial x_1}, & \ldots, & -X_n + \frac{\partial z}{\partial x_n}, & 0 \end{vmatrix}$$

sämmtlich verschwinden; und die Grössen y werden bestimmt durch die $r - 1$ Systeme partieller Differentialgleichungen, welche die Bedingungen ausdrücken, dass die Minoren der Ordnung $2r$ in der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & , \ldots, & a_{1,n} & , X_1 - \frac{\partial z}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial y_k}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & , \ldots, & a_{n,n} & , X_n - \frac{\partial z}{\partial x_n}, & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}, & \ldots, & \frac{\partial y_k}{\partial x_n} \\ -X_1 + \frac{\partial z}{\partial x_1}, & \ldots, & -X_n + \frac{\partial z}{\partial x_n}, & 0 & , 0 & , \ldots, & 0 \\ -\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \ldots, & -\frac{\partial y_1}{\partial x_n} & , 0 & , 0 & , \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{\partial y_k}{\partial x_1}, & \ldots, & -\frac{\partial y_k}{\partial x_n} & , 0 & , 0 & , \ldots, & 0 \end{vmatrix}$$

sämmtlich gleich Null sind. Die aufeinanderfolgenden Grössen y werden erhalten, indem man k der Reihe nach die Werthe $1, \ldots, r-1$ beilegt. Auf diese Weise können nicht mehr als $r-1$ Grössen y bestimmt werden und die $2r-1$ Grössen z, y, Y sind functional von einander unabhängig.

Aufgabe 1. Man erhält leicht die von Frobenius angegebenen Resultate*):

a) Wenn die Classe eines Pfaff'schen Differentialausdrucks dadurch geändert wird, dass man den Ausdruck mit einem Factor multiplicirt, so ist die Aenderung eine Erhöhung oder Erniedrigung um eine Einheit, je nachdem die Classe ungerade oder gerade ist.

b) Wenn die Classe eines Pfaff'schen Differentialausdrucks dadurch geändert wird, dass man zu dem Ausdruck ein vollkommenes Differential hinzufügt, so ist die Aenderung eine Erniedrigung oder Erhöhung um eine Einheit, je nachdem die Classe ungerade oder gerade ist.

c) Hieraus leite man die Wirkung her, welche auf die Classe eines bedingungsfreien Pfaff'schen Differentialausdrucks dadurch hervorgebracht wird, dass man ihn 1) mit einem Factor multiplicirt und 2) zu demselben ein vollständiges Differential hinzufügt.

Aufgabe 2. Die Coefficienten der Differentialelemente in dem Ausdrucke

$$X_1 dx_1 + \cdots + X_n dx_n$$

sind homogene Funtionen μ^{ten} Grades und X bezeichnet die homogene Function

$$X_1 x_1 + \cdots + X_n x_n .$$

Man zeige, dass, wenn X eine von Null verschiedene Constante ist, alsdann die Classe des ursprünglichen Ausdrucks ungerade ist; dass, wenn $X = 0$ und μ nicht gleich -1 ist, die Classe gerade ist, und dass schliesslich, wenn $X = 0$ ist, der Ausdruck nur ein exactes Differential sein kann, wenn $\mu = -1$ ist. (Frobenius.)

Aufgabe 3. Unter Beibehaltung der Bezeichnung in der letzten Aufgabe zeige man, dass, wenn X verschwindet, die Classe des Pfaff'schen Ausdrucks kleiner als n ist, wenn entweder n ungerade oder $\mu = -1$ ist.

Ebenso zeige man, dass, wenn X verschwindet, während μ von -1 verschieden und der Ausdruck keiner Bedingung unterworfen

*) Crelle's J. Bd. 86 (1879) S. 1—19.

ist, seine Classe um eine Einheit erniedrigt wird, wenn man den Ausdruck durch eine willkürliche homogene Relation vom Grade $\mu + 1$ dividirt. (Frobenius.)

Aufgabe 4. Wenn n Functionen, welche durch die von einander unabhängigen Gleichungen

$$A_i(f) = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

gegeben sind, derartig beschaffen sind, dass die Relationen

$$A_s\{A_t(f)\} = A_t\{A_s(f)\}$$

erfüllt sind, so ist

$$\frac{\begin{vmatrix} A_{1,1} & , \ldots, & A_{1,n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ A_{n-1,1} & , \ldots, & A_{n-1,n} \\ dx_1 & , \ldots, & dx_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{1,1} & , \ldots, & A_{1,n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ A_{n,1} & , \ldots, & A_{n,n} \end{vmatrix}}$$

ein vollkommenes Differential, wobei die n^2 Grössen A Functionen der Variablen x sind, welche nur den angegebenen Beschränkungen unterliegen. (Frobenius.)

12. Kapitel.

Abriss der Methode von Darboux.

Die Untersuchungen Darboux's über das Pfaff'sche Problem sind in einer im Jahre 1882 veröffentlichten Abhandlung*) enthalten, obwohl der grösste direct auf die Theorie bezügliche Theil schon im Jahre 1876 geschrieben wurde. Darboux behandelt mehr die Theorie der Formen als die Methoden der Integration der in der Theorie vorkommenden Differentialgleichungen und gleicht in dieser Beziehung Frobenius. Auch sein Verfahren ist in gewisser Beziehung dem von Frobenius angewandten ähnlich, da die Grundlage desselben der invariante Charakter gewisser Ausdrücke, insbesondere der associirten bilinearen Covariante bildet, und somit ist Darboux in Bezug auf die Publication von Frobenius beträchtlich überholt worden. Der übrige Theil der Abhandlung behandelt die Theorie der Berührungstransformationen, und obwohl die hierbei angewandte Methode verschieden ist, so waren doch die Resultate der Theorie aus den früher publicirten Abhandlungen von Lie und Mayer bereits bekannt.

Unter diesen Umständen werde ich nur die Resultate ohne Beweis anführen, um eine Andeutung über den Gang der Abhandlung zu geben.

§ 169.

1. Darboux nimmt

$$\Theta_d = \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i, \quad \Theta_\delta = \sum_{i=1}^{n} X_i \delta x_i$$

und beweist:

$$\delta \Theta_d - d\Theta_\delta = \Sigma\Sigma a_{i,k} dx_i \delta x_k,$$

*) „Sur le problème de Pfaff", Comptes Rendus Bd. 94 (1882) S. 835—837 und Darboux, Bulletin 2. Serie Bd. 6 (1882) S. 14—36, 49—68.

welches, als im Werthe von dem besonderen System von Variablen unabhängig, für die Veränderung der Variablen eine Invariante ist.

2. Der erste Schritt zur Herstellung der Normalform ist die Wahl solcher neuen unabhängigen Veränderlichen, dass, wenn Θ_d in denselben ausgedrückt wird, weniger Differentialelemente vorkommen. Zu diesem Zweck wird das Hülfsgleichungssystem

$$a_{1,1}dx_1 + \cdots + a_{n,1}dx_n = \lambda X_1 dt$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{1,n}dx_1 + \cdots + a_{n,n}dx_n = \lambda X_n dt$$

benutzt. Es ist ein invariantes System und kann ersetzt werden durch die einzige Gleichung

$$\delta\Theta_d - d\Theta_\delta = \lambda\Theta_\delta dt,$$

die als richtig angenommen wird, was immer auch die Variationen δx sein mögen.

3. Wenn n gerade und die Determinante Δ der Coefficienten der Grössen dx in dem Hülfssystem nicht Null ist, so werden die $n-1$ Integrale $y_1, \ldots, y_{n-1}$ der Gleichungen, welche unabhängig von t sind, als neue unabhängige Variablen genommen, und mit ihnen wird eine willkürliche Function y_n der ursprünglichen Variablen verbunden, so dass $y_1, \ldots, y_n$ n unabhängige Veränderlichen sind. Alsdann beweist man mit Hülfe der invarianten Eigenschaft der Hülfsgleichungen leicht, dass

$$\Theta_d = y_n \sum_{r=1}^{n-1} Y_r^0 dy_r$$

ist, wo die Coefficienten Y_r^0 von y_n unabhängig sind.

4. Ist n ungerade, so dass Δ nothwendig verschwindet, so wird λ, falls die ersten Minoren nicht sämmtlich verschwinden, in dem Hülfssystem gleich Null gesetzt. Die Verhältnisse der Differentialelemente sind bestimmt und es können $n-1$ Integrale der sich ergebenden Gleichungen gefunden werden. Werden diese Integrale mit $y_1, \ldots, y_{n-1}$ bezeichnet, und wird zu denselben eine neue willkürliche und unabhängige Function y_n hinzugenommen, so können wir die n Grössen als ein System von n unabhängigen Variablen betrachten. Man beweist dann, dass

$$\Theta_d = d\Psi + \sum_{r=1}^{n-1} Y_r^0 dy_r$$

ist, wo die Coefficienten Y_r^0 von y_n unabhängig sind.

Es können zwei Fälle eintreten. Wenn Ψ y_n enthält, kann es selbst als y_n genommen werden, so dass

$$\Theta_d = dy_n + \sum_{r=1}^{n-1} Y_r^0 dy_r$$

ist. Ist Ψ unabhängig von y_n, so kann Θ_d ausgedrückt werden in der Form:

$$\Theta_d = \sum_{r=1}^{n-1} Y_r^{(0)} dy_r .$$

5. Sollte das Hülfssystem, ebenfalls unter der Beschränkung $\lambda = 0$, nicht bestimmt sein, sondern nur p verschiedene Gleichungen enthalten, so macht Darboux es wie im vorigen Falle zu einem bestimmten, indem er demselben $n - p - 1$ Gleichungen

$$d\varphi_1 = 0, \ldots, d\varphi_{n-p-1} = 0$$

associirt. Die Beweisführung erfolgt in derselben Weise wie zuvor, und das allgemeine Resultat der ersten Transformation ist, dass ein Ausdruck Θ_d stets transformirt werden kann in einen andern von den drei Formen:

$$y_n \sum_{r=1}^{n-1} Y_r dy_r$$

$$\sum_{r=1}^{n-1} Y_r dy_r$$

$$dy_n + \sum_{r=1}^{n-1} Y_r dy_r ,$$

wo die Variablen $y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$ von einander unabhängig sind und die Coefficienten Y nur von den Variablen $y_1, \ldots, y_{n-1}$ abhängen.

6. Demnach kann ein Ausdruck Θ_d stets auf eine oder die andere der Formen gebracht werden:

$$dy - \sum_{r=1}^{p} z_r dy_r$$

$$\sum_{r-1}^{p} z_r dy_r ,$$

wo die Grössen y, z_i, y_i Functionen sämmtlicher Veränderlichen in Θ_d und von einander unabhängig sind; und $2p + 1$ oder $2p$, je nachdem die erste oder zweite Form gilt, ist nicht grösser als n.

Auf die erste oder zweite Form kann Θ_d zurückgeführt werden, je nachdem die Hülfsgleichungen dadurch nicht befriedigt oder befriedigt werden können, dass man λ von Null verschieden annimmt.

Die ganze Zahl p bestimmt sich als die Hälfte der (nothwendig geraden) Zahl von unabhängigen Gleichungen in dem Hülfssystem und die $2p$ Grössen y_i und z_i sind ein System von Integralen dieser unabhängigen Gleichungen. Für die erste Form sind die Grössen y und z nothwendig unabhängig von λ, welches für das zugehörige Hülfssystem gleich Null gesetzt worden ist; für die letztere Form sind die Verhältnisse der Grössen z von λ unabhängig.

7. Darboux wendet die Cauchy'sche Methode der Integration der Hülfsgleichungen an und gelangt zu Resultaten, welche den Resultaten von Lie (§ 147 und 154) bezüglich der Transformation des Ausdrucks auf eine äquivalente bedingungsfreie Form analog sind. Dieselben bestehen in Folgendem.

a. Wenn

$$\sum_{r=1}^{p} z_r \, dy_r$$

die canonische Form des Ausdrucks ist, so hat das aus $2p$ unabhängigen Gleichungen bestehende Hülfssystem $2p - 1$ von λ unabhängige Integrale. Es müssen daher mindestens $n - 2p + 1$ Variablen, etwa $x_{2p}, \ldots, x_n$, vorhanden sein, welche nicht Integrale des Systems sind. Wenn dann die $2p - 1$ Integrale in der Form von Hauptintegralen genommen und mit $u_1, \ldots, u_{2p-1}$ bezeichnet werden, so dass sich $u_1, \ldots, u_{2p-1}$ auf $x_1, \ldots, x_{2p-1}$ respective reduciren, falls man $x_{2p}, \ldots, x_n$ constante Werthe $a_{2p}, \ldots, a_n$ beilegt, so ist die äquivalente bedingungsfreie Form:

$$\Theta_d = K \sum_{r=1}^{2p-1} U_r \, du_r,$$

wo U_r der Werth von X_r ist, den man erhält, wenn man x_s für $s = 1, \ldots, 2p - 1$ durch u_s und für $s = 2p, \ldots, n$ durch a_s ersetzt.

b. Wenn

$$dy - \sum_{r=1}^{p} z_r \, dy_r$$

die canonische Form des Ausdrucks ist, so ist in dem Hülfssystem $\lambda = 0$ und das System von $2p$ unabhängigen Gleichungen hat $2p$ unabhängige Integrale. Es müssen daher mindestens $n - 2p$ Variablen, etwa $x_{2p+1}, \ldots, x_n$ vorhanden sein, welche nicht Integrale des Systems sind. Wenn dann die $2p$ Integrale in der Form von

Hauptintegralen genommen und mit $u_1, \ldots, u_{2p}$ bezeichnet werden, so dass sich $u_1, \ldots, u_{2p}$ auf $x_1, \ldots, x_{2p}$ respective reduciren, falls man $x_{2p+1}, \ldots, x_n$ constante Werthe $a_{2p+1}, \ldots, a_{2p}$ beilegt, so ist die äquivalente bedingungsfreie Form:

$$\Theta_d = dH + \sum_{r=1}^{2p} U_r\, du_r,$$

wo U_r der Werth von X_r ist, den man erhält, wenn man x_s für $s = 1, \ldots, 2p$ durch u_s und für $s = 2p+1, \ldots, n$ durch a_s ersetzt, und H eine Function ist, welche verschwindet für das letzte System von Substitutionen constanter Werthe für die $n - 2p$ Variablen x.

§ 170.

Diese Resultate werden angewendet auf die Lösung partieller Differentialgleichungen erster Ordnung (§ 136).

Der Rest der Abhandlung ist einer Untersuchung der Relationen, welche die Grundlage der Clebsch'schen Integrationsmethode (§ 125) bilden, und der Begründung*) der Theorie der Berührungstransformationen gewidmet, welche (wie im ersten Theile der Abhandlung) aus zwei simultanen Systemen von Variationen hervorgehen. Es ist überflüssig, die Untersuchung hier zu reproduciren; die Resultate stimmen mit denen überein, welche vorher von Lie und unabhängig von Mayer begründet und bereits in Kapitel 9 erörtert worden sind.

Aufgabe. Man beweise, dass unter Benutzung der gewöhnlichen bei den Pfaff'schen Differentialen angewendeten Bezeichnung die beiden Ausdrücke

$$\frac{\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \ldots, & a_{n,1}, & P_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n}, & \ldots, & a_{n,n}, & P_n \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1\,1}, & \ldots, & a_{n,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n}, & \ldots, & a_{n,n} \end{vmatrix}},$$

---

*) Diesem Theile seiner Untersuchung folgt Jordan in seinem Cours d'Analyse, Bd. 3 (1887), S. 339—348.

welche man hieraus erhält, indem man einmal $P_1, \ldots, P_n = X_1, \ldots, X_n$ und zweitens $P_1, \ldots, P_n = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial x_n}$ setzt, bei Vertauschung der unabhängigen Variablen Invarianten sind, vorausgesetzt, dass der Pfaff'sche Ausdruck keiner Bedingung unterliegt.

Man zeige, dass diese Ausdrücke die von Clebsch in seiner Theorie des Pfaff'schen Problems durch die Symbole (φ) und (φ, ψ) bezeichneten Grössen sind. (Darboux.)

---

13. Kapitel.

Systeme von Pfaff'schen Gleichungen.

In der Theorie der Systeme bedingungsfreier Pfaff'scher Functionen ist, wie man sehen wird, kaum irgend ein Fortschritt gemacht worden. In der That giebt es nur sehr wenige Untersuchungen, welche die Systeme simultaner nicht-exacter Gleichungen behandeln, und auch diejenigen, welche veröffentlicht worden sind, discutiren meistentheils solche exacten Integrale, wie sie die Systeme besitzen können. Die Hauptquellen, aus denen man sich über diesen Gegenstand unterrichten kann, sind folgende:

Biermann, Ueber n simultane Differentialgleichungen der Form $\sum X_\mu \, dx_\mu = 0$, Schlömilch's Zeitschrift, Bd. 30 (1885) S. 234—244.

Boole, On simultaneous differential equations of the first order in which the number of the variables exceeds by more than one the number of the equations, Phil. Trans., 1862, S. 437—454.

On the differential equations of dynamics, Phil. Trans., 1863, S. 485—501.

Supplementary volume of Treatise on Differential Equations, 1865, S. 74—89.

Engel, Zur Invariantentheorie der Systeme von Pfaff'schen Gleichungen, Leipz. Sitzungsber. (1889), S. 157—176; ibid. (1890), S. 192—207. Diese schliesst sich unmittelbar an an § 128 und 129 von Lie's Theorie der Transformationsgruppen (Leipzig 1888), welche sich mit dem Charakter solcher Transformationen beschäftigen, die ein solches System zulässt.

Frobenius, Ueber das Pfaff'sche Problem, Crelle's Journ. Bd. 82 (1877), besonders S. 287—289 der Abhandlung.

Imschenetsky, Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables,

Grun. Arch. Bd. 54 (1872), besonders S. 290—314 der Abhandlung. (Auch deutsch als Anhang zu Mansion, Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Berlin, J. Springer, 1892.)

Tanner, Preliminary note on a generalisation of Pfaff's problem, Lond. Math. Soc. Proc., Band 11 (1880), Seite 131—139.*)

Voss, Ueber die Differentialgleichungen der Mechanik, Math. Annal. Bd. 25 (1885), besonders S. 258—263 der Abhandlung.

§ 171.

Das System von n in den Differentialelementen der Variablen linearen Gleichungen (und das gleichweit sich erstreckende System der zugehörigen in den Ableitungen der abhängigen Function linearen partiellen Differentialgleichungen), welches in Kapitel 2 discutirt wurde, bestand als simultanes exactes System unter der Voraussetzung, dass die in § 26 als Kriterien für die Exactheit gegebenen Bedingungen erfüllt seien, und auf Grund dieser Voraussetzung wurde gefolgert, dass ein äquivalentes System von n Integralgleichungen von der Gestalt $u_r = c_r$ existirt. Jede solche Gleichung ist an und durch sich selbst ein Integral des Systems von Differentialgleichungen, d. h., wenn wir uns auf das System von n Gleichungen beschränken, die abgeleitete Gleichung

$$du_r = 0$$

wird vollständig befriedigt mit Hülfe der ursprünglichen Differentialgleichungen und man hat, um sie zu befriedigen, nicht nöthig, irgend eine der andern Integralgleichungen zu benutzen; und eine solche Gleichung wie

$$du_r = 0$$

ist nur eine lineare Combination einiger (oder aller) der gegebenen Differentialgleichungen.

Wird das ganze System von n Integralen (von denen jedes an und durch sich selbst ein Integral des Systems der Differentialgleichungen ist) als simultanes System betrachtet, so haben wir n Gleichungen

$$du_1 = 0, \ldots, du_n = 0;$$

jede derselben wird infolge der ursprünglichen Gleichungen befriedigt

*) Den von Prof. Tanner in dieser Abhandlung erhaltenen Resultaten vermag ich aus verschiedenen Gründen nicht zuzustimmen.

und ist eine lineare Combination dieser Gleichungen. Die n Integrale sind aber von einander unabhängig, so dass auch die n Gleichungen $du = 0$ unabhängig sind, d. h. die linearen Combinationen der vorstehenden Gleichungen sind von einander unabhängig und somit können die ursprünglichen Gleichungen aus den Gleichungen $du = 0$, welche eine unmittelbare Folge des Integralsystems sind, abgeleitet werden. Demnach sind das System der n abgeleiteten Integrale und das System der n gegebenen Differentialgleichungen vollständig äquivalent zu einander und von gleichem Umfange mit einander, vorausgesetzt dass, wie schon erwähnt, die Bedingungen des Kapitel 2, die daselbst als nothwendig und hinreichend erwiesen wurden, sämmtlich erfüllt sind. Das System wird in diesem Falle vollständig integrirbar genannt.

Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen wird aber noch als simultanes System bestehen, wenn nur einige oder auch gar keine der Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind. In dem ersten Falle, wo nur einige der angegebenen Bedingungen erfüllt sind, kann das System von Differentialgleichungen einige exacte Integrale haben, d. h. es kann einige Gleichungen von der Form $u = c$ von solcher Art geben, dass

$$du = 0$$

nur allein infolge des Systems von Differentialgleichungen ohne Rücksicht auf irgendwelche Integralbeziehungen zwischen den Veränderlichen befriedigt ist. Die Anzahl dieser exacten Integrale muss kleiner als n sein, denn sonst würde das System vollständig integrirbar sein, und jedes von ihnen (die nothwendig als von einander unabhängig angenommen werden) führt, wenn es differentiirt wird, zu einer linearen Combination des Systems von Gleichungen und die verschiedenen Combinationen sind von einander unabhängig. Wenn ein solches System eine Anzahl exacter Integrale besitzt, wo diese Anzahl kleiner ist als die Anzahl der gegebenen Gleichungen, so heisst dasselbe unvollständig integrirbar.

Aus der früheren Darlegung ist ersichtlich, dass das System exacter Integrale, welches ein unvollständig integrirbares System von Differentialgleichungen besitzt, dem System der Differentialgleichungen nicht äquivalent ist. In der That, da jedes Glied des Systems zu einer linearen Combination des Systems von Gleichungen führt, so erhält man eine Anzahl von unabhängigen linearen Combinationen der Glieder des Systems, die kleiner ist als die Anzahl der Glieder, und daher kann das System von Differentialgleichungen nicht aus den

exacten Integralen abgeleitet werden. Die Ausfüllung dieser Lücke, d. h. die Herstellung eines Integraläquivalents für die Differentialgleichungen und die Benutzung der exacten Integrale zur Transformation des Differentialsystems, wird später erörtert werden.

Endlich kann es vorkommen, dass das gegebene System von Differentialgleichungen gar kein exactes Integral besitzt, d. h. dass es keine lineare Combination der Gleichungen giebt, die zu einer Gleichung

$$du = 0$$

führen könnte. In diesem Falle wird das System nicht integrirbar genannt und es erhebt sich wie vorher die Frage nach dem Integraläquivalent desselben.

§ 172.

Die Integration eines vollständig integrirbaren Systems ist bereits discutirt worden; wir gehen zur Discussion der charakteristischen Eigenschaften eines unvollständig integrirbaren Systems über. Natürlich ist der erste Schritt die Bestimmung der Anzahl und der Form der exacten Integrale.

Wir nehmen das System von n Gleichungen mit $m + n$ Veränderlichen in der Form:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \Omega_1 = -dx_{m+1} + A_{1,1}dx_1 + A_{1,2}dx_2 + \cdots + A_{1,m}dx_m = 0 \\ \Omega_2 = -dx_{m+2} + A_{2,1}dx_1 + A_{2,2}dx_2 + \cdots + A_{2,m}dx_m = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Omega_n = -dx_{m+n} + A_{n,1}dx_1 + A_{n,2}dx_2 + \cdots + A_{n,m}dx_m = 0, \end{cases}$$

wo die Coefficienten A Functionen der Variablen x sind.

Es sei $\varphi = c$ ein exactes Integral des Systems (I); dann ist die Differentialgleichung

$$d\varphi = 0$$

eine lineare Combination der n Gleichungen $\Omega = 0$ und ist infolge dieser Gleichungen befriedigt. Die Form der Combination liegt auf Hand, nämlich

$$d\varphi = -\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+r}} \Omega_r,$$

und daher erhalten wir, wenn wir für $d\varphi$ seinen vollständigen Ausdruck setzen und die rechte Seite auf die linke schaffen, die Gleichung:

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} dx_s + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+r}} \left(\sum_{s=1}^{m} A_{r,s}\, dx_s\right) = 0,$$

welche im Verein mit (I) befriedigt ist. Diese Gleichung enthält aber nur die Differentialelemente $dx_1, \ldots, dx_m$, zwischen denen durch (I) keine Relation gegeben ist; demnach muss der Coefficient jedes der Elemente verschwinden, so dass man die m Gleichungen erhält:

$$\text{(II)} \qquad \Delta_s \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} + \sum_{r=1}^{n} A_{r,s} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+r}} = 0$$
$$(s = 1, \ldots, m),$$

welche für ein exactes Integral φ des gegebenen Systems (I) erfüllt sind, und diese müssen durch jedes solches Integral befriedigt werden.

Nun ist dieses System (II) der Form nach dasselbe wie das entsprechende System (II) in § 38; das vorliegende aber ist nicht vollständig (in dem Jacobi'schen Sinne), da die Bedingungen für die Coexistenz und den Besitz gemeinschaftlicher Lösungen nicht sämmtlich befriedigt sind, wie es bei dem früheren System der Fall war. Daher verschwinden die Grössen

$$(\Delta_i, \Delta_j) = (\Delta_i \Delta_j - \Delta_j \Delta_i) \varphi$$

nicht sämmtlich infolge von (II) und mithin kann man neue nichtverschwindende Ausdrücke $\nabla_s \varphi$ erhalten, die sämmtlich linear und homogen in den partiellen ersten Differentialquotienten von φ nach $x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}$ sind. Damit Functionen φ der angegebenen Art existiren können, ist nach der gewöhnlichen Theorie erforderlich, dass für jedes Operationssymbol

$$\nabla_s \varphi = 0$$

sei. Hierdurch werden neue Differentialgleichungen in das System eingeführt und man muss mit der Anwendung der Jacobi'schen Bedingungen in der Form

$$(\Delta_s, \nabla_t) = 0, \qquad (\nabla_s, \nabla_t) = 0$$

fortfahren, indem man jede nicht verschwindende und nicht erfüllte Bedingung als neue mit dem bereits erhaltenen Systeme zu verbindende Gleichung beibehält, bis auf diese Weise keine neuen Gleichungen mehr entstehen. Das in dieser Weise erweiterte System ist nun ein vollständiges System und die einzelnen Glieder des Systems sind linear von einander unabhängig.

Das ursprüngliche System (II) enthielt m Gleichungen. Ist p die Anzahl der Glieder, welche nothwendig sind, um dasselbe zu einem vollständigen System zu machen, und sind diese letzteren

$$\text{(III)} \qquad \nabla_s \varphi = \sum_{r=1}^{n} B_{r,s} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+r}} = 0$$
$$(s = 1, 2, \ldots, p),$$

so ist die Function φ eine Lösung der $m+p$ simultanen linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen des vollständigen durch (II) und (III) gebildeten Systems.

Ist $p < n$, so besitzt das vollständige System von $m+p$ Gleichungen mit $m+n$ Variablen nach § 38 $n-p$ functional von einander unabhängige Lösungen und daher hat das ursprüngliche System (I) von Differentialgleichungen $n-p$ exacte Integrale.

Ist $p = n$, so können, weil die Gleichungen (II) und (III) linear von einander unabhängig und in den $m+n$ Grössen $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ linear und homogen sind, dieselben nur befriedigt sein, wenn jede der Ableitungen von φ gleich Null ist, und daher muss φ selbst eine blosse Constante sein, ein Resultat, welches, soweit exacte Integrale in Frage kommen, keinen Sinn hat.

Analog kann, wenn $p > n$ ist, das vollständige System nur durch Nullwerthe der Ableitungen von φ befriedigt werden, was ebenfalls, soweit die Existenz gemeinschaftlicher exacter Integrale in Frage kommt, zu einem nichtssagenden Resultat führt.

Hiernach ist klar, dass das gegebene System (I) exacte Integrale nur besitzt, wenn das zugehörige System partieller Differentialgleichungen (II) durch Hinzufügung von weniger als n neuen Gleichungen zu einem vollständigen System gemacht werden kann; und wenn zu diesem Zwecke p neue Gleichungen hinzugefügt werden müssen, so ist die Anzahl exacter Integrale gleich $n-p$.

§ 173.

Die Bedingungen für den Besitz von $n-p$ exacten Integralen sind somit identisch mit den Bedingungen dafür, dass das System zugehöriger partieller Differentialgleichungen (II) durch Hinzufügung von p abgeleiteten Gleichungen zu demselben zu einem vollständigen gemacht werden kann. Die Darstellungsform dieser Bedingungen für den allgemeinsten Fall kann aus der Form der Bedingungen für den folgenden besonderen Fall gefolgert werden.

Wir betrachten das System von Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} du = U_1\,dx_1 + U_2\,dx_2 + U_3\,dx_3 + U_4\,dx_4 \\ dv = V_1\,dx_1 + V_2\,dx_2 + V_3\,dx_3 + V_4\,dx_4 \\ dw = W_1\,dx_1 + W_2\,dx_2 + W_3\,dx_3 + W_4\,dx_4 \end{array}\right\}.$$

Die zugehörigen dem System (II) entsprechenden partiellen Differentialgleichungen sind:

$$\Delta_r\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_r} + U_r\frac{\partial\varphi}{\partial u} + V_r\frac{\partial\varphi}{\partial v} + W_r\frac{\partial\varphi}{\partial w} = 0$$

$$(r = 1, 2, 3, 4).$$

Es sei:

$$\Delta_i P_j - \Delta_j P_i = P_{i,j}$$

für $P = U, V, W$; alsdann sind die Bedingungen für die Coexistenz der vier Gleichungen und für den Besitz gemeinschaftlicher Lösungen dargestellt durch die sechs Gleichungen

$$\Delta_{i,j}\varphi = U_{i,j}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + V_{i,j}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + W_{i,j}\frac{\partial\varphi}{\partial w} = 0,$$

von denen einige weder identisch verschwinden noch infolge des ersten Systems befriedigt sein dürfen. Ferner sei

$$\Delta_k P_{i,j} - \Delta_{i,j} P_k = {}_kP_{i,j}$$

für jedes Symbol k; weiter

$$\Delta_{\vartheta,k} P_{i,j} - {}_k\Delta_{i,j} P_\vartheta = {}^{\vartheta}_{k}P_{i,j}$$

für jedes Symbol ϑ u. s. w., und es werde die rechtwinklige Matrix

$$\cdots\left\|\begin{array}{ccccccc} U_{i,j}, & {}_kU_{i,j}, & {}_{l,k}U_{i,j}, & {}^{m}_{l,k}U_{i,j}, & {}^{m,n}_{l,k}U_{i,j}, & {}^{m,n}_{l,k}U^{p}_{i,j}, & {}^{m,n}_{l,k}U^{p,q}_{i,j} \\ V_{i,j}, & {}_kV_{i,j}, & {}_{l,k}V_{i,j}, & {}^{m}_{l,k}V_{i,j}, & {}^{m,n}_{l,k}V_{i,j}, & {}^{m,n}_{l,k}V^{p}_{i,j}, & {}^{m,n}_{l,k}V^{p,q}_{i,j} \\ W_{i,j}, & {}_kW_{i,j}, & {}_{l,k}W_{i,j}, & {}^{m}_{l,k}W_{i,j}, & {}^{m,n}_{l,k}W_{i,j}, & {}^{m,n}_{l,k}W^{p}_{i,j}, & {}^{m,n}_{l,k}W^{p,q}_{i,j} \end{array}\right\|\cdots$$

für alle Werthe 1, 2, 3 von i, j, k, l, m, n, p, q gebildet, wobei in der Matrix sieben Arten von Grössen vorkommen.

Damit dann das ursprüngliche System drei von einander unabhängige exacte Integrale haben könne (es kann nicht mehr als drei haben), ist es nothwendig und hinreichend, dass sämmtliche Determinanten eines Elementes, welche aus den Grössen der in der ersten angegebenen Colonne in obiger Matrix vorkommenden Type gebildet sind, verschwinden, mit andern Worten, dass sämmtliche Grössen $U_{i,j}$, $V_{i,j}$, $W_{i,j}$ verschwinden. Wir können diese die Bedingungen für drei Integrale nennen.

Damit das ursprüngliche System nur zwei exacte Integrale besitzen könne, ist nothwendig und hinreichend, erstens dass die Be-

dingungen für drei Integrale nicht sämmtlich befriedigt sind, zweitens dass sämmtliche Determinanten von 2^2 Elementen, welche aus den Grössen der in den drei ersten angegebenen Colonnen der Matrix vorkommenden Type gebildet sind, verschwinden. Diese werden wir die Bedingungen für zwei Integrale nennen; sie erfordern, dass eine neue Gleichung zu dem ursprünglichen System von vier partiellen Differentialgleichungen hinzugefügt werden soll.

Damit das ursprüngliche System nur ein exactes Integral haben könne, ist nothwendig und hinreichend, erstens dass die Bedingungen für zwei Integrale nicht sämmtlich befriedigt sind, zweitens dass sämmtliche Determinanten aus 3^2 Elementen, welche aus allen in der Matrix vorkommenden Elementen gebildet werden können, verschwinden. Diese werden wir die Bedingungen für ein Integral nennen; sie besagen, dass dem ursprünglichen System von vier partiellen Differentialgleichungen zwei neue Gleichungen hinzugefügt werden müssen.

Damit schliesslich das ursprüngliche System kein exactes Integral besitze, ist es nothwendig und hinreichend, dass nicht alle Determinanten von 3^2 Elementen, welche in den Bedingungen für ein Integral näher bezeichnet sind, verschwinden.

Die Verallgemeinerung auf das System (I) liegt nun auf der Hand. Man würde ein rechtwinkliges System mit n Reihen bilden müssen; die Anzahl der Typen von Grössen, welche in dem System vorkämen, würde $2^n - 1$ sein; die Zahl der Grössen jeder Type würde von m und ausser der ersten Type*) auch von n abhängen. Die Bedingungen, dass das System nur $n - p$ exacte Integrale besitze, sind die, dass die Determinanten aus p^2 Elementen, welche aus den Grössen der in den ersten $2^p - 1$ Colonnen vorkommenden Type gebildet sind, verschwinden, nicht aber sämmtliche Determinanten aus einer geringeren Anzahl von Elementen verschwinden.

Aufgabe 1. Man folgere aus dem Vorhergehenden (oder beweise irgendwie), dass das simultane Systam

$$\left.\begin{aligned} dx_3 &= x_4\,dx_1 + x_5\,dx_2 \\ dx_4 &= x_6\,dx_1 + \vartheta\,dx_2 \\ dx_5 &= \vartheta\,dx_1 + x_7\,dx_2 \end{aligned}\right\},$$

wo ϑ irgend eine Function aller sieben Veränderlichen ist, kein exactes Integral besitzt.

Aufgabe 2. Die Bedingungen dafür, dass die beiden Gleichungen

*) Die Anzahl der Grössen der ersten Type ist $\frac{1}{2}m(m-1)$.

$$dx_1 = \alpha_3 dx_3 + \alpha_4 dx_4$$
$$dx_2 = \beta_3 dx_3 + \beta_4 dx_4$$

ein oder kein exactes Integral haben, sind erstens, dass die Grössen

$$\gamma_1 = A_3\alpha_4 - A_4\alpha_3, \qquad \gamma_2 = A_3\beta_4 - A_4\beta_3,$$

wo

$$A_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + \beta_3 \frac{\partial}{\partial x_2}$$
$$A_4 = \frac{\partial}{\partial x_4} + \alpha_4 \frac{\partial}{\partial x_1} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

ist, nicht beide verschwinden, und zweitens, dass die Determinanten zweiter Ordnung in

$$\left\| \begin{matrix} \gamma_1, & A_3\gamma_1 - B\alpha_3, & A_4\gamma_1 - B\alpha_4 \\ \gamma_2, & A_3\gamma_2 - B\beta_3, & A_4\gamma_2 - B\beta_4 \end{matrix} \right\|,$$

wo

$$B = \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

ist, respective sämmtlich verschwinden oder nicht sämmtlich verschwinden. (Engel.)

Beispiel 1. Wir betrachten das simultane System von Gleichungen*):

$$\left. \begin{aligned} dz &= (t + xy + xz)\,dx + (xzt + y - xy)\,dy \\ dt &= (y + z - 3x)\,dx + (zt - y)\,dy \end{aligned} \right\}.$$

Die zugehörigen partiellen Differentialgleichungen sind:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + (t + xy + xz)\frac{\partial\varphi}{\partial z} + (y + z - 3x)\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

$$\Delta'\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + (xzt + y - xy)\frac{\partial\varphi}{\partial z} + (zt - y)\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

Bildet man die Jacobi'sche Bedingung, so hat man in der Bezeichnung der letzten Aufgabe:

$$\gamma_1 = x(t^2 + xyt + xy + yz + z^2 - 3xz - 1 - y)$$
$$\gamma_2 = \quad t^2 + xyt + xy + yz + z^2 - 3xz - 1 - y,$$

so dass, wenn man den algebraischen Factor abwirft, die Jacobi'sche Bedingung ist:

$$\Delta''\varphi = x\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

Die drei Gleichungen $\Delta\varphi = 0$, $\Delta'\varphi = 0$, $\Delta''\varphi = 0$ bilden, wie man leicht beweist, ein vollständiges System; da sie vier unabhängige Veränderliche enthalten, so haben sie ein Integral.

---

*) Boole, Phil. Trans. 1862, S. 450.

Die leichteste Art, dieses Integral zu erhalten, ist folgende. Aus den Gleichungen erhalten wir:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -x\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -y\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -(3x^2+t)\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

und daher:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\{dz - xdt - ydy - (3x^2+t)\,dx\}$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,d\left(z - xt - x^3 - \frac{1}{2}y^2\right).$$

Da $d\varphi$ und $d\left(z - xt - x^3 - \frac{1}{2}y^2\right)$ vollkommene Differentiale sind, so folgt, dass $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ irgend eine Function von $z - xt - x^3 - \frac{1}{2}y^2$ allein ist. Somit kann man

$$u = z - xt - x^3 - \frac{1}{2}y^2 = c$$

als das eine gesuchte Integral nehmen.

Aufgabe 3. Man behandele analog die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} dx + dy + dz + (x+1)\,dt = 0 \\ xdx + ydy + zdz - xdt = 0 \end{aligned}\right\}.$$

(Mansion.)

Ebenso die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} dx_1 &= \frac{x_2(x_2 - x_5) - x_4(x_3 + x_4)}{x_2^{\,2} - x_4^{\,2}}\,dx_2 + \frac{x_2(x_2 + x_3) - x_4(x_4 - x_5)}{x_2^{\,2} - x_4^{\,2}}\,dx_4 \\ \frac{1}{2}\,dx_3 &= \frac{x_2x_5 + x_3x_4}{x_2^{\,2} - x_4^{\,2}}\,dx_2 - \frac{x_2x_3 + x_4x_5}{x_2^{\,2} - x_4^{\,2}}\,dx_4 \\ dx_5 &= \frac{x_3 - x_5}{x_2 + x_4}(dx_2 + dx_4) \end{aligned}\right\}.$$

Beispiel 2. Die folgende Untersuchung*) ist von erheblicher

*) Dieselbe rührt wesentlich von Imschenetsky her; vgl. „Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables“ Grun. Arch. Bd. 54 (1872), insbesondere § 13 u. 14, S. 290—314 (auch deutsch von H. Maser als Anhang zu: Mansion, Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Berlin 1892). Er hat die Untersuchung von Boole verallgemeinert und weiter geführt (l. c. S. 451, 452); die Beziehung zwischen beiden wird weiter unten angegeben. Imschenetsky hat indessen die Bedingungen (S. 309) in der Form zweier Gleichungen mit einer abhängigen Variablen gelassen; ohne Beweis können diese nicht als blosse zwei

Wichtigkeit in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

In der gewöhnlichen Monge-Boole'schen Methode der Auflösung der Gleichung

$$R'r + 2S's + T't + U'(rt - s^2) = V',$$

in welcher R', S', T', U', V' Functionen von x, y, z, p, q sind, wird angenommen, dass die Gleichungen ein Zwischenintegral besitzen, und es ist bekannt*), dass, wenn dieses wirklich der Fall sein soll, zwei Bedingungen von den Grössen R', S', T', U', V' erfüllt sein müssen. Diese Bedingungen können folgendermassen erhalten werden.

Um das Zwischenintegral $u = f(v)$ zu bilden, ist es nothwendig, zwei Integrale $u = a$, $v = b$ (d. h. exacte Integrale im Sinne der vorhergehenden Paragraphen) des Systems von Gleichungen zu erhalten**):

$$\left.\begin{aligned} U'dy + \lambda_1 T'dx + \lambda_1 U'dp &= 0 \\ U'dx + \lambda_2 R'dy + \lambda_2 U'dq &= 0 \\ pdx + \quad qdy - \quad dz &= 0 \end{aligned}\right\},$$

wo λ_1 und λ_2 die Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^2(R'T' + U'V') + 2\lambda U'S' + U'^2 = 0$$

sind. Für den vorliegenden Zweck haben wir die Bedingungen anzugeben dafür, dass das vorstehende Gleichungssystem zwei exacte Integrale habe.

Setzt man

$$\mu = -\frac{1}{\lambda}, \quad T' = -U'T, \quad S' = -U'S, \quad R' = -U'R, \quad V' = -U'V,$$

und nimmt man an, dass U' nicht verschwindet, so sind die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} dz &= pdx + qdy \\ dp &= Tdx + \mu_1 dy \\ dq &= \mu_2 dx + Rdy \end{aligned}\right\},$$

wo μ_1 und μ_2 die Wurzeln der Gleichung

$$\mu^2 - 2\mu S + RT + V = 0$$

Bedingungen genommen werden, die sich auf Grössen erstrecken, die jene abhängige Veränderliche nicht enthalten. Die expliciten Bedingungen werden in obiger Untersuchung aufgestellt.

*) Vgl. Lehrbuch § 230. Das Resultat ist offenbar in genau denselben Worten anwendbar auf den Fall, wo U nicht verschwindet.

**) Vgl. Lehrbuch § 232—234.

sind. Die partiellen zu dem System gehörigen Differentialgleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z} + T\frac{\partial}{\partial p} + \mu_2\frac{\partial}{\partial q}\right)\varphi = 0\\ \Delta'\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} + \mu_1\frac{\partial}{\partial p} + R\frac{\partial}{\partial q}\right)\varphi = 0\end{aligned}\right\},$$

und diese beiden Gleichungen enthalten fünf Variable. Jede den beiden Gleichungen gemeinschaftliche Lösung muss ferner der Gleichung genügen:

$$\begin{aligned}0 &= (\Delta\Delta' - \Delta'\Delta)\varphi\\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\Delta q - \Delta' p) + \frac{\partial\varphi}{\partial p}(\Delta\mu_1 - \Delta' T) + \frac{\partial\varphi}{\partial q}(\Delta R - \Delta'\mu_2)\\ &= (\mu_2 - \mu_1)\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}(\Delta\mu_1 - \Delta' T) + \frac{\partial\varphi}{\partial q}(\Delta R - \Delta'\mu_2).\end{aligned}$$

Nun untersucht Boole (a. a. O.) die Frage nach den Bedingungen, welche nothwendig sind, damit das ursprüngliche System vollständig integrirbar sei, also drei exacte Integrale besitze. Zu diesem Zwecke muss die neu erhaltene Gleichung, welches die Jacobi'sche Bedingung ist, die durch die beiden ersten erfüllt sein muss, identisch verschwinden. Demnach muss $\mu_2 = \mu_1 = S$ sein und dies führt zu der Bedingung

$$S^2 = RT + V$$

und ferner

$$\Delta S = \Delta' T, \qquad \Delta R = \Delta' S,$$

welches die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen sind. Sind diese Bedingungen erfüllt, so giebt es drei exacte Integrale, etwa $u = a$, $v = b$, $w = c$. Werden p und q aus ihnen eliminirt, so erhält man eine Relation zwischen x, y, z, a, b, c, welche ein Integral der ursprünglichen Differentialgleichung ist und nach der Imschenetsky'schen Methode verallgemeinert werden kann*).

Wenn wir jedoch annehmen, dass das System unvollständig integrirbar ist und nur zwei exacte Integrale hat, so darf die neue Gleichung nicht verschwinden und die vorstehenden Bedingungen dürfen daher nicht sämmtlich erfüllt sein. Nimmt man an, dass die Wurzeln der quadratischen Gleichung in μ ungleich sind, und setzt man:

$$\frac{\Delta\mu_1 - \Delta' T}{\mu_2 - \mu_1} = P$$

$$\frac{\Delta R - \Delta'\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} = Q,$$

*) Vgl. Lehrbuch § 271.

so ist die neue Gleichung:

$$\Delta''\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial z} + P\frac{\partial}{\partial p} + \Theta\frac{\partial}{\partial q}\right)\varphi = 0,$$

so dass nunmehr φ drei Gleichungen zu befriedigen hat. Da es zwei Integrale geben soll, so muss das System vollständig sein und daher müssen die weiteren Gleichungen

$$(\Delta''\Delta - \Delta\,\Delta'')\,\varphi = 0$$
$$(\Delta''\Delta' - \Delta'\Delta'')\,\varphi = 0$$

infolge der drei vorhergehenden erfüllt sein. Werden diese gebildet, so erhält man:

$$P\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}(\Delta''T - \Delta P) + \frac{\partial\varphi}{\partial q}(\Delta''\mu_2 - \Delta Q) = 0$$
$$Q\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}(\Delta''\mu_1 - \Delta'P) + \frac{\partial\varphi}{\partial q}(\Delta''R - \Delta'Q) = 0,$$

so dass die nothwendigen Bedingungen augenscheinlich aus einer Vergleichung mit $\Delta''\varphi = 0$ allein ableitbar sind und lauten:

$$\Omega_1 = -P^2 + \Delta''T - \Delta P = 0$$
$$\Omega_2 = -PQ + \Delta''\mu_1 - \Delta'P = 0$$
$$\Omega_3 = -PQ + \Delta''\mu_2 - \Delta Q = 0$$
$$\Omega_4 = -Q^2 + \Delta''R - \Delta'Q = 0,$$

deren Anzahl gleich vier ist.

Demnach sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Differentialgleichung ein Zwischenintegral besitzt, die, dass die Gleichungen

$$\Omega_1 = 0,\quad \Omega_2 = 0,\quad \Omega_3 = 0,\quad \Omega_4 = 0$$

erfüllt sein müssen, und diese sind, da sie durch die nicht schwer zu erhaltenden Relationen

$$Q\Omega_1 - 2P\Omega_2 + P\Omega_3 = \Delta\,\Omega_2 - \Delta'\Omega_1$$
$$P\Omega_4 - 2Q\,\Omega_3 + Q\,\Omega_2 = \Delta'\Omega_3 - \Delta\,\Omega_4$$

verbunden sind, zwei unabhängigen Bedingungen äquivalent.

Es war angenommen worden, dass die Wurzeln der quadratischen Gleichung in μ ungleich sind. Sind dieselben aber gleich, so lässt sich leicht beweisen, dass, wenn die Grössen $\Delta S - \Delta'T$ und $\Delta R - \Delta'S$ nicht beide verschwinden, das simultane System nicht mehr als ein exactes Integral hat, und es müssen gewisse Bedingungen erfüllt sein, um den Besitz eines exacten Integrals zu gewährleisten. Ist z. B. $\Delta S - \Delta'T = 0$, so muss man, damit das System ein exactes Integral haben könne,

$$S^2 = RT + V$$

haben, d. h. die Bedingung für die Gleichheit der Wurzeln muss erfüllt und S und T müssen von der Form sein:

$$S = q\frac{\partial\vartheta}{\partial z} + \frac{\partial\vartheta}{\partial y}$$

$$T = p\frac{\partial\vartheta}{\partial z} + \frac{\partial\vartheta}{\partial x},$$

wo ϑ irgend eine Function von x, y, z ist.

Analog kann gezeigt werden, dass die nothwendigen Bedingungen dafür, dass die Gleichung

$$r + 2Ss + Tt = V$$

ein Zwischenintegral besitze (ohne dass die Hülfsgleichungen ein vollständig integrirbares System sind), die folgenden sind:

$$\Delta''\mu - \Delta\vartheta = P\vartheta, \qquad \Delta'\vartheta = \vartheta^2$$

$$\Delta''\nu - \Delta P = P^2, \quad \Delta''\mu + \Delta' P = P\vartheta,$$

wo

$$\vartheta = \frac{\Delta'\mu}{\mu - \mu'}, \qquad P = \frac{\Delta'\nu + \Delta\mu'}{\mu - \mu'}$$

ist und wobei μ und μ' die (als ungleich angenommenen) Wurzeln von

$$\mu^2 - 2S\mu + T = 0$$

und Δ, Δ', Δ'' definirt sind durch die Gleichungen:

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial y} + (p + \mu q)\frac{\partial}{\partial z} + V\frac{\partial}{\partial p}$$

$$\Delta' = \frac{\partial}{\partial q} - \mu'\frac{\partial}{\partial p}$$

$$\Delta'' = (1 + q\vartheta)\frac{\partial}{\partial z} + \vartheta\frac{\partial}{\partial y} + P\frac{\partial}{\partial p}.$$

Die Folgerungen bezüglich der Ausdehnung der vier Bedingungen und der Modificationen, im Falle die Wurzeln gleich sind, brauchen kaum angegeben zu werden.

§ 174.

Die Anzahl der exacten Integrale des gegebenen als unvollständig integrirbar angenommenen Systems von Differentialgleichungen ist gleich der Anzahl von Lösungen des vollständig gemachten Systems zugehöriger partieller Differentialgleichungen. Für die Lösung eines vollständigen Systems derartiger Gleichungen sind bereits Methoden gegeben worden; wir können daher die Lösungen als bekannt annehmen, etwa in der Form:

$$u_1 = c_1, \quad u_2 = c_2, \quad \ldots, \quad u_{n-p} = c_{n-p},$$

wo die Grössen c Constanten sind.

Sind aber diese Resultate bekannt, so kann man sie benutzen, um das Gleichungssystem zu transformiren. Jedes derselben leitet zu einer Differentialgleichung

$$du = 0,$$

welche eine lineare Combination der ursprünglichen Gleichungen ist, und da die $n - p$ Grössen u functional von einander unabhängig sind, so sind die $n - p$ linearen Combinationen ebenfalls von einander unabhängig; dieselben können daher benutzt werden, um $n - p$ der ursprünglichen Gleichungen, welche aus den in den linearen Combinationen vorkommenden passend ausgewählt werden können, zu ersetzen. Werden nun die Variablen transformirt, so dass $n - p$ der neuen $m + n$ Variabeln $u_1, \ldots, u_{n-p}$ sind, so haben die Gleichungen denselben linearen Charakter wie zuvor. Die ersten $n - p$ derselben sind:

$$du_1 = 0, \ldots, du_{n-p} = 0;$$

die übrigen p sind linear und enthalten $u_1, \ldots, u_{n-p}$ nebst den anderen $m + p$ Variabeln und das so transformirte System erstreckt sich ebensoweit wie das ursprüngliche System.

Nimmt man nun die $n - p$ exacten Integrale in der Form

$$u_1 = c_1, \ldots, u_{n-p} = c_{n-p}$$

und substituirt diese in die übrigen p Gleichungen, so erhält man nur ein System von p Gleichungen mit $m + p$ Variablen allein und mit Constanten. Ferner kann dieses neue System kein exactes Integral haben, denn sonst würde die Rückwärtstransformation zu den alten Variablen zu einem andern exacten Integral des alten Systems führen.

Demnach kann ein unvollständig integrirbares System von n Gleichungen, welches $n - p$ exacte Integrale besitzt, mit Hülfe dieser Integrale durch ein nicht integrirbares System von p Gleichungen ersetzt werden, und was auch immer das Integraläquivalent des nicht integrablen Systems sein möge, dieses Integraläquivalent bildet zusammen mit dem System exacter Integrale das Integraläquivalent des unvollständig integrirbaren Systems, aus welchem es abgeleitet war.

§ 175.

Durch dieses Resultat und durch die noch übrigbleibende Frage des § 171 werden wir zur Betrachtung des Charakters des Integraläquivalents eines nichtintegrirbaren Systems linearer Gleichungen geführt. Ein solches System ist offenbar eine Verallgemeinerung des Falles einer einzigen Pfaff'schen Gleichung, und es ist natürlich zu erwarten, dass das Integraläquivalent eines solchen Systems aus mehr als den n Gleichungen bestehen wird, aus denen es bestehen würde, wenn das System vollständig integrirbar wäre. Wie in dem Falle einer einzigen Gleichung ist es wünschenswerth, das Integraläquivalent des Systems so allgemein als möglich zu erhalten. Diese Allgemeinheit wird durch zwei Eigenschaften bedingt: Erstens, das Integraläquivalent muss die geringstmögliche Anzahl von Integralgleichungen enthalten, welche ausreichen, um in eindeutiger Weise zu den Differentialgleichungen zu führen, denn alsdann sind die Variationen der Veränderlichen am wenigsten beschränkt; zweitens, die Gleichungen in einem solchen System müssen von einer möglichst allgemeinen Form sein. Es ergeben sich daher **drei Probleme**:

1) die Bestimmung der Anzahl der Gleichungen in dem Integraläquivalent eines nicht integrirbaren Systems;

2) die Ableitung irgend eines einfachen Integraläquivalents eines solchen Systems;

3) die Verallgemeinerung eines solchen Integraläquivalents, wenn man eins gefunden hat.

Der gegenwärtige Stand der Analysis scheint aber nur auszureichen, um das erste dieser drei Probleme zu lösen.

Beispiel. Das System

$$dy_2 = y_3 dy_1, \quad dy_3 = y_4 dy_1,$$

in welchem y_1, y_2, y_3, y_4 functional unabhängig sind, ist, wie leicht zu sehen, nicht integrirbar; sein Integraläquivalent muss daher mehr als zwei Gleichungen enthalten. Ein System von Integralen wird offenbar gegeben durch:

$$y_1 = \text{const.}, \quad y_2 = \text{const.}, \quad y_3 = \text{const.};$$

ein anderes durch:

$$y_4 = 2a \qquad \text{(eine Constante)}$$
$$y_3 = 2ay_1 + c$$
$$y_2 = ay_1^2 + cy_1 + b,$$

und das allgemeinste durch

$$\varphi(y_1, y_2) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + 2 y_3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1 \partial y_2} + y_3^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} + y_4 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 0,$$

wo φ irgend eine willkürliche Function ist. Jedes von diesen Systemen führt zu den beiden gegebenen Differentialgleichungen und nur zu diesen, soweit die gegebenen Variationen in Betracht kommen. Die geometrische Deutung liegt auf der Hand.

§ 176.

Wir nehmen nun das Gleichungssystem (I), von dem wir voraussetzen, dass es nicht integrirbar sei. Das System lautet:

$$\text{(I)} \begin{cases} \Omega_1 = -\,dx_{m+1} + A_{1,1} dx_1 + A_{1,2} dx_2 + \cdots + A_{1,m} dx_m = 0 \\ \Omega_2 = -\,dx_{m+2} + A_{2,1} dx_1 + A_{2,2} dx_2 + \cdots + A_{2,m} dx_m = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Omega_n = -\,dx_{m+n} + A_{n,1} dx_1 + A_{n,2} dx_2 + \cdots + A_{n,m} dx_m = 0, \end{cases}$$

wo die Coefficienten A Functionen der Variablen sind.

Wir gehen zunächst dazu über, die geringstmögliche Anzahl von Gleichungen zu bestimmen, aus denen ein Integraläquivalent von (I) bestehen kann, und zu diesem Zwecke bedienen wir uns einer Verallgemeinerung der von Natani bei der analogen Aufgabe in dem Falle einer Gleichung benutzten Methode*), nämlich der Einführung neuer Variablen, welche so gewählt sind, dass in den Gleichungen, nachdem sie transformirt sind, so wenig Differentialelemente als möglich bleiben.

Die neuen Variablen seien $u_1, u_2, \ldots, u_p$; $v_1, v_2, \ldots, v_r$, wo

$$p + r = n + m$$

ist; natürlich wird vorausgesetzt, dass diese Variablen functional von einander unabhängig sind. Alsdann ist jede der alten Variablen x durch die neuen ausdrückbar, und somit ist:

$$\delta x = \sum \frac{\partial x}{\partial u_s} \delta u_s + \sum \frac{\partial x}{\partial v_t} \delta v_t .$$

*) Diese Aufgabe scheint zuerst von Biermann gelöst zu sein: „Ueber n simultane Differentialgleichungen der Form $\sum_{\mu=1}^{n+m} X_\mu dx_\mu = 0$", Schlöm. Ztschr. Bd. 30 (1885) S. 234–244.

Betrachtet man diese als willkürliche Variationen, so hat man für alle Grössen λ:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Omega_i = \sum_{s=1}^{p} \delta u_s \left\{ -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial x_{m+i}}{\partial u_s} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_{i,j} \frac{\partial x_j}{\partial u_s} \right\}$$
$$+ \sum_{t=1}^{r} \delta v_t \left\{ -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial x_{m+i}}{\partial v_t} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_{i,j} \frac{\partial x_j}{\partial v_t} \right\}.$$

Gehen wir von willkürlichen Variationen zu solchen über, welche die Differentialgleichungen erfüllen, so muss die rechte Seite der neuen Gleichung verschwinden. Da die Grössen u und v functional unabhängig sind, so kann jenes nur aus dem einen oder dem andern von zwei Gründen geschehen: entweder es muss ein Differentialelement, oder es muss der Coefficient eines Differentialelementes verschwinden. Es seien daher u diejenigen Variablen, deren Differentialelemente verschwinden, und die Variablen v diejenigen, deren Differentialelemente verschwindende Coefficienten haben.

Die zweite dieser Bedingungen giebt für jeden der r Werthe von t die Gleichung

$$-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial x_{m+i}}{\partial v_t} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_{i,j} \frac{\partial x_j}{\partial v_t} = 0$$

und alsdann ist für die willkürlichen Variationen die neue Form der obigen Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Omega_i = \sum_{s=1}^{p} \delta u_s \left\{ -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial x_{m+i}}{\partial u_s} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_{i,j} \frac{\partial x_j}{\partial u_s} \right\}.$$

Da diese Gleichung für alle Grössen λ gilt, so ist:

$$(A) \qquad \frac{\partial x_{m+i}}{\partial v_t} = \sum_{j=1}^{m} A_{i,j} \frac{\partial x_j}{\partial v_t}$$
$$\begin{pmatrix} t = 1, 2, \ldots, r \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

und daher:

$$\Omega_i = \sum_{s=1}^{p} \delta u_s \left\{ -\frac{\partial x_{m+i}}{\partial u_s} + \sum_{j=1}^{m} A_{i,j} \frac{\partial x_j}{\partial u_s} \right\}.$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Variationen, welche mit den Differentialgleichungen verträglich sind, machen Ω_i zu Null, mithin erhalten wir n in den p Differentialelementen lineare und homogene Gleichungen. Lösen wir diese

in der Weise auf, dass n der Elemente durch die übrigbleibenden q (wo $p - n = q$) ausgedrückt werden, so erhalten wir n neue Gleichungen von der Form:

$$(\mathrm{I}')\quad \begin{cases} Y_1 = - du_{q+1} + \sum_{r=1}^{q} U_{1,r}\, du_r = 0 \\ Y_2 = - du_{q+2} + \sum_{r=1}^{q} U_{2,r}\, du_r = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_n = - du_{q+n} + \sum_{r=1}^{q} U_{q,r}\, du_r = 0, \end{cases}$$

welche sich eben so weit erstrecken wie (I), und die zwischen ihnen bestehenden Relationen sind von der Form

$$(B)\qquad \Omega_i = \sum_{k=1}^{n} \varrho_{i,k}\, Y_k$$

für die n Werthe $i = 1, 2, \ldots, n$.

Nimmt man irgend eine der n Gleichungen in (B) und setzt die Variationen der Variablen auf beiden Seiten derselben gleich, so erhält man $m + n$ Gleichungen, und diese $m + n$ Gleichungen enthalten:

1) die n Multiplicatoren $\varrho_{i,1}, \varrho_{i,2}, \varrho_{i,3}, \ldots, \varrho_{i,n}$;
2) die p Grössen u;
3) die nq Grössen U.

Eliminirt man die n Multiplicatoren aus den $m + n$ Gleichungen, so behält man m Gleichungen übrig, welche die p Grössen u und die nq Grössen U enthalten. Solche m Gleichungen bleiben für jede der n Gleichungen in (B) übrig und daher behalten wir mn Gleichungen übrig, welche die Grössen u und U enthalten.

Nehmen wir den allgemeinsten Fall, indem wir voraussetzen, dass diese mn Gleichungen von einander unabhängig sind, so müssen wir haben:

$$mn \leqq p + nq,$$

denn sonst würden die Bedingungen nicht erfüllt zu sein brauchen. Somit:

$$p \geqq \frac{n}{n+1}(m + n).$$

Es ergiebt sich daher, dass der kleinste Werth von p gleich $\frac{n}{n+1}(m + n)$ ist, welche Zahl, wie bemerkt sein möge, in allen

gegenwärtig in Betrachtung stehenden Fällen grösser als n ist; denn wir betrachten nicht ein „gewöhnliches" System von Gleichungen, für welches $m = 1$ sein würde, sondern solche, für welche $m > 1$ ist.

Nun sind, wie im entsprechenden Falle einer einzigen Gleichung, die Integrale des Systems (I) oder (I'):

$$u_1 = c_1,\ u_2 = c_2,\ \ldots,\ u_p = c_p$$

und die Anzahl der Gleichungen soll so klein als möglich werden. Daher nehmen wir den kleinstmöglichen Werth von p.

Wenn dann $\frac{n}{n+1}(m+n)$ eine ganze Zahl ist, so nehmen wir diese ganze Zahl als den Werth von p.

Ist diese Grösse aber ein Bruch, so nehmen wir die nächst grössere ganze Zahl als den Werth von p. Es sei

$$\frac{n(m+n)}{n+1} = N - \frac{\lambda}{n+1},$$

wo λ je nach dem Werthe von m gleich $0, 1, \ldots, n$ sein kann. Alsdann nehmen wir die Anzahl der Grössen u, d. h. die Zahl der Gleichungen in dem Integraläquivalent des Differentialsystems, gleich N.

§ 177.

Um das Integraläquivalent in der gegenwärtigen Form so allgemein als möglich zu machen, lassen wir für die Grössen u einen möglichst grossen Spielraum, da dadurch die Variationen der Veränderlichen weniger beschränkt werden. Hiernach werden sämmtliche Functionen U, deren Anzahl gleich

$$n(N-n)$$

ist, bestimmt sein und nachher werden die mn Gleichungen genügen, um

$$mn - n(N-n) = N - \lambda$$

von den Grössen u zu bestimmen. Da die Gesammtzahl der Grössen u gleich N ist, so folgt, dass λ von ihnen unbestimmt bleiben und daher willkürlich angenommen werden können.

Hiernach haben wir den **Satz:**

Das allgemeinste Integraläquivalent eines nicht integrirbaren bedingungsfreien Systems von n Pfaff'schen Gleichungen zwischen $m+n$ Variablen besteht aus N Gleichungen, von denen λ willkürlich sind, wo N gleich $\frac{n(m+n)}{n+1}$, falls diese Grösse eine ganze Zahl ist, und wo dann λ gleich

Null ist. Ist aber diese Grösse keine ganze Zahl, so ist N die dieser Grösse nächstliegende höhere ganze Zahl und dann wird der Werth von λ gegeben durch die Gleichung $\frac{n(m+n)}{n+1} = N - \frac{\lambda}{n+1}$ *).

Dieses Resultat stimmt mit dem von Biermann (a. a. O.) erhaltenen überein, der Natani's Methode mit einigen abweichenden analytischen Einzelheiten benutzt. Sein Resultat lautet wie folgt:

Wenn

$$m + n = k(n + 1) + \varkappa,$$

so giebt es nk bestimmte und $\varkappa$ willkürliche Integrale, wo $\varkappa$ kleiner als $n + 1$ ist. In der That zeigt die Gleichung

$$\frac{n(m+n)}{n+1} = nk + \frac{n\varkappa}{n+1}$$

$$= (nk + \varkappa) - \frac{\varkappa}{n+1}$$

die Identität der beiden Formen des Resultats.

In Bezug auf den Werth von λ kann man eine wichtige Folgerung ziehen. Es ist:

$$m + n = k(n + 1) + \lambda$$

und λ ist kleiner als $n + 1$.

Die Zahl λ muss kleiner als m sein; denn wenn

$$\lambda = m - 1 + \mu$$

ist, so ist

$$n + 1 - \mu = k(n + 1),$$

wo k, welches eine ganze Zahl ist, Null sein muss, wofern nicht μ gleich Null oder negativ ist. Es folgt daher, dass die Anzahl der willkürlichen Integrale kleiner sein muss als die kleinere der beiden Zahlen m und $n + 1$.

§ 178.

Augenscheinlich giebt der Fall $m = 1$ ein System gewöhnlicher simultaner Differentialgleichungen und $n = 1$ giebt den früheren Fall einer einzigen Pfaff'schen Gleichung. In dem allgemeinen Falle, wie

---

*) Man beachte, dass λ derart genommen werden muss, dass der Nenner des gebrochenen Theils auf der rechten Seite $n + 1$ ist. Der Bruch $\frac{n(m+n)}{n+1}$ darf nicht auf kleinere Zahlen durch Heben reducirt werden, wenn eine solche Reduction möglich ist.

im Falle einer einzigen Gleichung kann es vorkommen, dass das System von Differentialgleichungen gewissen Bedingungen genügt, welche die Anzahl der Gleichungen in dem Integralsystem auf weniger denn N reduciren, wenn auch nicht in der Weise, dass eine solche Gleichung exact wird.

Wenn das System unvollständig integrirbar ist, so dass es $n-p$ exacte Integrale besitzt und mit Hülfe dieser exacten Integrale durch ein nicht integrirbares System von p Gleichungen mit $m+p$ Variablen ersetzt werden kann, so ist die Gesammtzahl der Gleichungen in dem System von Integralen, welche den ursprünglichen Differentialgleichungen äquivalent sind, gleich

$$n-p+\frac{p(m+p)}{p+1},$$

falls diese Grösse eine ganze Zahl ist, oder, wenn diese Grösse keine ganze Zahl ist, so ist die Anzahl der Integrale die nächsthöhere ganze Zahl. Nehmen wir diese Grösse in der Form

$$n+\frac{p}{p+1}(m-1),$$

so sehen wir sofort, dass ein Integraläquivalent mehr als n Gleichungen enthält, wofern nicht etwa das System von n Differentialgleichungen der betrachteten Art vollständig integrirbar ist.

So ist für Beispiel 1 in § 173: $n=2$, $m=2$. Es wurde dort bewiesen, dass für das System von Gleichungen $n-p=1$ ist; demnach ist dasselbe durch eine einzige (nicht integrirbare) Gleichung mit drei Veränderlichen ersetzbar und das Integral dieser Gleichung besteht aus einer willkürlichen Gleichung und einer bestimmten Gleichung, die zum Theil von der willkürlichen Gleichung abhängig ist. Demnach enthält das Integralsystem des gegebenen Systems von Differentialgleichungen drei Gleichungen, nämlich eine absolut bestimmte, welche exact ist, eine vollständig willkürliche und eine relativ bestimmte, die theilweise von der willkürlichen Gleichung abhängt.

Beispiel. Wir können das allgemeine Resultat des § 177 auf den Fall eines Systems von r partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit s unabhängigen und r abhängigen Veränderlichen, etwa $x_1, \ldots x_s, z^{(1)}, \ldots, z^{(r)}$, anwenden. Werden die r Gleichungen nach $p_s^{(1)}, \ldots, p_s^{(r)}$ aufgelöst, so erhält man Resultate von der Form

$$p_s^{(i)}=p_s^{(i)}(x_1, \ldots, x_s, z^{(1)}, \ldots, z^{(r)}, p_1^{(1)}, \ldots, p_{s-1}^{(r)})=\vartheta_i$$

und daher hat man als ein System simultaner Pfaff'scher Gleichungen die r Gleichungen:

$$- dz^{(i)} + p_1^{(i)} dx_1 + \cdots + p_{s-1}^{(i)} dx_{s-1} + \vartheta_i dx_s = 0$$
$$(i = 1, \ldots, r).$$

Die Anzahl der Veränderlichen ist

r	für die Grössen	z
s	" " "	x
$r(s-1)$	" " "	p

und daher insgesammt gleich $rs + s$. Demnach ist die Anzahl der Gleichungen in dem äquivalenten Integralsystem gleich

$$\frac{r}{r+1}(rs + s),$$

d. h. diese Anzahl ist gleich rs. Diese Gleichungen enthalten die Veränderlichen z, x und die $r(s-1)$ Veränderlichen p; werden diese Veränderlichen p eliminirt, so behält man r Gleichungen übrig, welche nur die Variablen z und x enthalten. Diese r Gleichungen bilden das Integralsystem des ursprünglichen Systems von r partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

§ 179.

Im Falle einer einzigen bedingungsfreien Pfaff'schen Gleichung mit einer ungeraden Anzahl $2n + 1$ von Variablen war im § 69 bewiesen worden, dass das Integralsystem ein einziges willkürliches Integral und ein System von n bestimmten Integralen enthält; und in einigen der Methoden wird das willkürliche Integral benutzt, um aus der Gleichung eine der Variabeln und deren Differentialelement fortzuschaffen. Die neue Gleichung ist dann eine bedingungsfreie Pfaff'sche Gleichung mit einer geraden Anzahl von Veränderlichen und daher besteht ihr Integralsystem bloss aus bestimmten Integralen.

Im Falle eines Systems von bedingungsfreien Pfaff'schen Gleichungen kann man von den willkürlichen Integralen einen analogen Gebrauch machen, wenn man nach § 177 weiss, dass solche Integrale in dem Integralsystem auftreten. Kommen λ willkürliche Integrale vor, so kann man dieselben benutzen, um aus den Gleichungen λ der in ihnen vorkommenden Variablen und deren Differentialelemente fortzuschaffen. Und dies ist die einzige Art und Weise, wie derartige Integrale bei der Transformation des Systems von Differentialgleichungen

verwerthet werden können; sie können nicht dazu benutzt werden, um die Anzahl dieser Gleichungen zu vermindern, denn ein solches Resultat würde voraussetzen, entweder dass ein exactes Integral gefunden werden könne, was durch unsere anfängliche Voraussetzung ausgeschlossen ist, oder dass eine Gleichung verschwindet infolge von Relationen, die aus diesen Integralgleichungen, nachdem sie differentiirt sind, hergeleitet werden können.

Dass das letztere unmöglich ist, ist eine unmittelbare Folge des am Schlusse von § 177 gefundenen Resultats, dass die Anzahl der willkürlichen Integrale kleiner ist als die kleinere der beiden Zahlen m und $n+1$. Da jede Gleichung in dem ursprünglichen System (I) $m+1$ Differentialelemente enthält, so kann dieselbe nicht zum Verschwinden gebracht werden mittels einer Anzahl von Gleichungen der Form

$$d\varphi = 0,$$

deren Zahl kleiner ist als m oder $n+1$.

Demnach kann man die λ willkürlichen Gleichungen in dem Integralsystem benutzen, um λ der Variablen aus dem System von Differentialgleichungen zu eliminiren, und das transformirte äquivalente System besteht ebenfalls noch aus n Gliedern mit nur $m+n-\lambda$ Variablen. Da $m+n-\lambda = k(n+1)$ ist, so enthält das Integral, welches dem neuen Systeme äquivalent ist, nk bestimmte Gleichungen und gar keine willkürlichen Gleichungen, d. h. die willkürlichen Integrale können benutzt werden, um das System von Differentialgleichungen auf ein neues System zu transformiren, dessen Integraläquivalent vollständig aus bestimmten Gleichungen besteht.

Wenn daher irgend ein gegebenes System willkürliche Integrale besitzt, so dürfen wir annehmen, dass diese Transformation ausgeführt sei.

§ 180.

In besonderen Fällen muss man vorsichtig sein. So ist z. B. in der Aufgabe 1 des § 173 der Werth von m gleich 4 und nicht gleich 2, obwohl nur zwei Differentialelemente auf der rechten Seite vorkommen; in Wirklichkeit muss man annehmen, dass dx_6 und dx_7 auf jeder rechten Seite mit einem verschwindenden Coefficienten vorkommen.

Ferner ist es hinsichtlich einer solchen Gleichung wünschenswerth, willkürliche Integrale von solcher Art anzugeben, dass sie zu be-

stimmten Gleichungen von allgemeiner Form und nicht von solcher Form führen können, wie sie den singulären Lösungen bei gewöhnlichen Gleichungen entsprechen würde. Wenn wir z. B. für das erwähnte Beispiel

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \alpha, \quad \psi(x_1, x_2, x_3) = \beta$$

nebst einer andern, die für die gegenwärtigen Bemerkungen nicht näher specificirt zu werden braucht, als die drei willkürlichen Gleichungen nehmen, so wird die erste Gleichung

$$dx_3 = x_4 dx_1 + x_5 dx_2$$

entweder durch eine Relation

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, & \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \\ x_4, & x_5, & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

welche vom Charakter einer singulären Lösung ist, da sie kein neues willkürliches Element enthält, oder durch die Gleichung

$$x_3 = \text{const.}$$

erfüllt, die in Verbindung mit den beiden andern oben genannten, als Ersatz für diese beiden ersten Gleichungen, ergiebt:

$$x_1 = \text{const.}, \; x_2 = \text{const.}$$

Und dann erhält man in Verbindung mit der letzten Differentialgleichung aus den andern beiden:

$$x_4 = \text{const.}, \; x_5 = \text{const.}$$

Die Gesammtzahl dieser Integrale ist also fünf, also um eins kleiner als die nach § 177 zu erwartende Zahl, sie bilden aber ein System von sehr beschränkten Variationen und sie sind unabhängig von x_6 und x_7, so dass sie kaum anders als für ein sehr specielles System von Integralen gelten können.

Das eben betrachtete System von Gleichungen ist, wenn in gewöhnlicher Bezeichnung ausgedrückt,

$$\left.\begin{aligned} dz &= p dx + q dy \\ dp &= r dx + \vartheta dy \\ dq &= \vartheta dx + t dy \end{aligned}\right\},$$

d. i. das Hülfssystem zu der Gleichung:

$$s = \vartheta = \text{Function von } (x, y, z, p, q, r, t),$$

einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unab-

hängigen Veränderlichen Die Theorie lehrt, dass das Integraläquivalent aus einem System von sechs Gleichungen besteht, von denen drei willkürlich sind, und diese Gleichungen enthalten die sieben Variablen x, y, z, p, q, r, t. Werden aus den sechs Gleichungen vier Grössen (etwa p, q, r, t) eliminirt, so bleiben zwei Gleichungen in z, x, y, welche zwei Gleichungen das Integraläquivalent der Gleichung

$$s = \vartheta(x, y, z, p, q, r, t)$$

bilden, d. h. die allgemeinste partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen hat zwei Gleichungen als ihr Integraläquivalent.

Geometrisch interpretirt bedeutet dieses Resultat, dass die gegebene Differentialgleichung $s = \vartheta$ eine gewisse Eigenschaft einer Fläche in Punkten darstellt, welche auf der Berührungslinie derselben mit einer andern Fläche, die in diesen Punkten dieselbe Krümmung besitzt, liegen; und der Charakter jeder dieser Flächen bedingt denjenigen der andern.

Das Integraläquivalent besteht im Allgemeinen aus sechs Gleichungen, da das System kein exaktes Integral besitzt (Aufgabe 1, § 173). Aber es kann vorkommen, dafs für besondere Formen von ϑ eine der willkürlichen Gleichungen isolirt dasteht, derart dass sie keinen Einfluss auf die Formen der bestimmten Gleichungen hat. Dann ergiebt sich als Resultat der Elimination, dass eine Gleichung übrig bleibt, nachdem p, q, r, t aus den andern fünf eliminirt sind, und diese Gleichung enthält z, x, y; in ihrer Form hängt dieselbe ab von den willkürlichen Charakteren von zweien der angenommenen Integrale und wird demnach zwei willkürliche Elemente enthalten; sie ist jedoch vollständig unabhängig von der übrigbleibenden willkürlichen Gleichung, welche nach Substitution der Werthe für p, q, r, t in eine Gleichung zwischen z, x, y übergeht, und sie ist daher die Gleichung einer neuen Fläche mit einem völlig willkürlichen Element. Das Integralsystem besteht in Wirklichkeit aus den beiden Gleichungen; aber die zweite Gleichung ist eine isolirte Gleichung und die Differentialgleichung wird durch die erste allein befriedigt.

Geometrisch interpretirt bedeutet dieses Resultat, dass die gegebene Differentialgleichung $s = \vartheta$ eine gewisse Eigenschaft der durch das eine Integral bestimmten Fläche längs aller Curven darstellt, in denen sie von der willkürlichen durch das andere Integral bestimmten Fläche berührt wird. Da die letztere infolge ihres willkürlichen Charakters unabhängig von der ersteren ist, so sind die Berührungslinien alle

Curven, welche überhaupt auf der ersten Fläche gezogen werden können, und daher kann die angegebene Eigenschaft als eine Eigenschaft jener ganzen Fläche betrachtet werden.

Demnach würde der vorhergehenden Theorie gemäss die Lösung der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung die folgende sein.

Die Hülfsgleichungen sind:

$$dz = p dx + q dy + 0 dr + 0 dt$$
$$dp = r dx + \vartheta dy + 0 dr + 0 dt$$
$$dq = \vartheta dx + t dy + 0 dr + 0 dt,$$

wo ϑ eine Function der Grössen z, x, y, p, q, r, t ist, die durch die gegebene Differentialgleichung bestimmt ist. Das System besitzt drei willkürliche Integrale. Sind dieselben:

$$r = f_1(x, z, p, q)$$
$$t = f_2(x, z, p, q)$$
$$y = f_3(x, z, p, q)$$

und werden diese substituirt, so werden die Gleichungen ein System, dessen Integrale bestimmt sind. Werden dieselben aufgelöst, so nehmen sie die Form an:

$$dx = \frac{dz}{Z} = \frac{dp}{P} = \frac{dq}{Q},$$

wo P, Q, Z Functionen von x, z, p, q sind und die Functionen f_1, f_2, f_3 in sich enthalten. Werden diese integrirt, so sind ihre Integrale von der Form

$$g_1(x, p, q, z) = a$$
$$g_2(x, p, q, z) = b$$
$$g_3(x, p, q, z) = c.$$

Eliminirt man aus diesen und aus

$$f_3(x, p, q, z) = y$$

die Grössen p und q, so gelangt man zu zwei Integralen, welches die erforderliche Anzahl ist.

Eine analoge Theorie ist auf partielle Differentialgleichungen anderer Ordnungen anwendbar und ebenso auch auf ein System von zwei (oder mehr) partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*). Wir haben dann als Hülfsgleichungen:

---

*) Die Fälle, in welchen die Gleichungen von der vollständigen Art sind, sind von Vályi betrachtet worden, Crelle's J. Bd. 95, S. 99—101.

$$\left.\begin{aligned} dz &= p\,dx + q\,dy + 0\,ds \\ dp &= \vartheta\,dx + s\,dy + 0\,ds \\ dq &= s\,dx + \varphi\,dy + 0\,ds \end{aligned}\right\},$$

ein System, welches im Allgemeinen drei bestimmte und zwei willkürliche Gleichungen in seinem Integralsystem hat.

§ 181.

Biermann behauptet (a. a. O. § 176), dass Pfaff's Integrationsmethode — eine Methode successiver Reduction — für ein bedingungsfreies System nicht angewendet werden kann, und er zeigt, dass auch Clebsch's zweite Methode nicht anwendbar ist, indem er (I′) als das Aequivalent von (I) nimmt und beweist, dass ein dem Clebsch'schen ähnliches Verfahren nicht zu Gleichungen für u führt, welche dieselben sind wie die Gleichungen für die Verhältnisse der Grössen U. Dies konnte naturgemäss erwartet werden, denn es giebt $n^2(k-1)$ Grössen U und nur $m+n-nk$ von u verschiedene unabhängige Variablen in dem vollständig transformirten System, und in den gegenwärtig betrachteten Fällen ($n > 1$ und $m > 1$) kann man leicht sehen, dass $n^2(k-1)-1$ grösser ist als $m+n-nk$.

Das folgende Verfahren, ein Versuch, eine Reduction auszuführen, ist eine Verallgemeinerung des Natani'schen Verfahrens für den Fall einer einzigen Pfaff'schen Gleichung. Es genügt zu zeigen, dass die Verallgemeinerung, wie am Ende der Untersuchung bemerkt wird, für den gewünschten Zweck nicht zum Ziele führt.

Wir betrachten das Gleichungssystem (I) und nehmen den Darlegungen in § 179 gemäss an, dass sämmtliche Integrale bestimmt sind, so dass $m+n$ durch $n+1$ theilbar ist. Es sei $m+n=p+1$.

Dann muss man bei jeder Transformation der Gleichungen $p+1$ neue Variablen nehmen. Diese seien $u_1, \ldots, u_p, v$. Als Voraussetzung der neuen Transformation nehmen wir zuerst an, dass jeder der Ausdrücke $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ unabhängig von dv ist. Die Hülfsgleichungen sind:

$$(1)\qquad -\frac{\partial x_{m+i}}{\partial v} + A_{i,1}\frac{\partial x_1}{\partial v} + A_{i,2}\frac{\partial x_2}{\partial v} + \cdots + A_{i,m}\frac{\partial x_m}{\partial v} = 0$$

$$(i = 1, \ldots, n).$$

Dann ergiebt sich, dass jede lineare Combination der transformirten Ausdrücke Ω unabhängig von dem Differentialelement dv ist.

Nimmt man nun eine solche lineare Combination:

$$\lambda_1 \Omega_1 + \lambda_2 \Omega_2 + \cdots + \lambda_n \Omega_n,$$

so enthält dieselbe nicht dv. Wir nehmen an, dass man, wenn es angeht, die Grössen λ (welche veränderliche Grössen sind) derart bestimmt habe, dass der neue Ausdruck auch von v unabhängig ist. Dies erfordert, dass die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Omega_i\right) = 0$$

für willkürliche Variationen der Veränderlichen befriedigt sein muss; somit

$$-\sum_{i=1}^{n} \delta x_{m+i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial v} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial(\delta x_{m+i})}{\partial v}$$
$$+\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda_i}{\partial v} \sum_{s=1}^{m} A_{i,s}\, \delta x_s + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{s=1}^{n} A_{i,s} \frac{\partial(\delta x_s)}{\partial v}$$
$$+\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial A_{i,s}}{\partial v}\, \delta x_s = 0.$$

Nun ist, wenn in (1) die Grössen x durch ihre Werthe in $u_1, \ldots, u_p, v$ ersetzt werden, das Resultat eine Identität und somit ist jede willkürliche Variation der linken Seite gleich Null. Demnach ist für jeden Werth von i:

$$-\delta \frac{\partial x_{m+i}}{\partial v} + \sum_{s=1}^{m} A_{i,s}\, \delta \frac{\partial x_s}{\partial v} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial x_s}{\partial v}\, \delta A_{i,s} = 0.$$

Multiplicirt man dies mit λ_i, summirt über alle Werthe von i und bedenkt, dass, weil δ eine willkürliche Variation ist,

$$\frac{\partial}{\partial v}(\delta x) = \delta \frac{\partial x}{\partial v}$$

ist, so erhält man durch Gleichsetzung der Theile der beiden Gleichungen, welche die Grössen $\frac{\partial}{\partial v}(\delta x)$ enthalten, die Relation:

$$-\sum_{i=1}^{n} \delta x_{m+i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial v} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda_i}{\partial v} \sum_{s=1}^{m} A_{i,s}\, \delta x_s$$
$$+\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{s=1}^{m} \left\{\frac{\partial A_{i,s}}{\partial v}\, \delta x_s - \frac{\partial x_s}{\partial v}\, \delta A_{i,s}\right\} = 0,$$

welche für willkürliche Variationen δ befriedigt ist. Nun ist:

$$\frac{\partial A_{i,s}}{\partial v} = \sum_{\mu=1}^{m+n} \frac{\partial A_{i,s}}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial v}$$

$$\delta A_{i,s} = \sum_{\mu=1}^{m+n} \frac{\partial A_{i,s}}{\partial x_\mu} \delta x_\mu$$

und somit:

$$- \sum_{i=1}^{n} \delta x_{m+i} \left\{ \frac{\partial \lambda_i}{\partial v} + \sum_{r=1}^{n} \lambda_r \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial x_s}{\partial v} \frac{\partial A_{r,s}}{\partial x_{m+i}} \right\}$$

$$+ \sum_{s=1}^{m} \delta x_s \left\{ \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial \lambda_r}{\partial v} A_{r,s} + \lambda_r \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_{r,s}}{\partial x_{m+i}} \frac{\partial x_{m+i}}{\partial v} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda_r \sum_{t=1}^{m} c_{r,s,t} \frac{\partial x_t}{\partial v} \right) \right\} = 0,$$

wo

$$c_{r,s,t} = \frac{\partial A_{r,s}}{\partial x_t} - \frac{\partial A_{r,t}}{\partial x_s}.$$

Da diese Gleichung gelten soll für beliebige Variationen der Veränderlichen, so müssen die Coefficienten der verschiedenen Variationen verschwinden und daher

$$(2) \qquad 0 = \frac{\partial \lambda_i}{\partial v} + \sum_{r=1}^{n} \lambda_r \left(\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial A_{r,s}}{\partial x_{m+i}} \frac{\partial x_s}{\partial v} \right) \qquad .$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

und:

$$(3) \qquad 0 = \sum_{r=1}^{n} \left[A_{r,s} \frac{\partial \lambda_r}{\partial v} + \lambda_r \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_{r,s}}{\partial x_{m+i}} \frac{\partial x_{m+i}}{\partial v} + \sum_{t=1}^{m} c_{r,s,t} \frac{\partial x_t}{\partial v} \right\} \right]$$

$$(s = 1, \ldots, m).$$

Dies sind somit $m + n$ Gleichungen.

Wir haben nun in (1), (2), (3) insgesammt $m + 2n$ Gleichungen, um die $m + n$ Grössen x als Functionen von v und den n Coefficienten λ zu bestimmen. Jede der Gleichungen ist linear in den Ableitungen der $m + 2n$ Grössen nach v und demnach würde es auf den ersten Blick scheinen, als wenn die Elimination sogleich zu einer Relation zwischen den Grössen λ und den Variablen x führen würde, die ohne irgendwelche Integration zu erhalten wäre.

Die Erklärung hierfür ist, dass das System von $m + 2n$ Gleichungen einer linearen Relation unterworfen ist, die, wie man leicht sieht,

$$\sum_{s=1}^{m} \Phi_s \frac{\partial x_s}{\partial v} = \sum_{r=1}^{n} \left(\Theta_r \frac{\partial x_{m+r}}{\partial v} + \Omega_r' \frac{\partial \lambda_r}{\partial v} \right)$$

ist, wo $\Omega_r' = 0$, $\Theta_r = 0$, $\Phi_s = 0$ respective die Gleichungen (1), die Gleichungen (2) und die Gleichungen (3) sind. Daher ist das ganze System von Gleichungen $m + 2n - 1$ unabhängigen Gleichungen äquivalent, welche in den zu bestimmenden $m + 2n$ Grössen linear und homogen sind.

Nimmt man nun neue Grössen $\vartheta_2, \vartheta_3, \ldots, \vartheta_n$, welche definirt werden durch die Gleichungen

$$\lambda_r = \vartheta_r \lambda_1 \qquad (r = 2, \ldots, n),$$

und setzt man voraus, dass die Gleichungen lösbar seien, so können ihre Lösungen in den Formen dargestellt werden:

$$\frac{\frac{\partial x_1}{\partial v}}{X_1} = \frac{\frac{\partial x_2}{\partial v}}{X_2} = \cdots = \frac{\frac{\partial x_m}{\partial v}}{X_m} = \frac{\frac{\partial x_{m+1}}{\partial v}}{Y_1} = \cdots = \frac{\frac{\partial x_{m+n}}{\partial v}}{Y_n}$$

$$= \frac{\frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial v}}{P_1} = \frac{\frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial \lambda_2}{\partial v}}{P_2} = \cdots = \frac{\frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial \lambda_n}{\partial v}}{P_n},$$

wo $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n, P_1, \ldots, P_n$ Functionen der Variablen x und der $n - 1$ Variablen ϑ allein sind.

Das System muss zunächst derart transformirt werden, dass man Gleichungen erhält, welche die zu bestimmenden Veränderlichen enthalten. Wir haben:

$$\frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial \lambda_r}{\partial v} = \frac{\partial \vartheta_r}{\partial v} + \vartheta_r \frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial v},$$

und daher erhalten wir das transformirte System:

$$\frac{\frac{\partial x_1}{\partial v}}{X_1} = \cdots = \frac{\frac{\partial x_m}{\partial v}}{X_m} = \frac{\frac{\partial x_{m+1}}{\partial v}}{Y_1} = \cdots = \frac{\frac{\partial x_{m+n}}{\partial v}}{Y_n}$$

$$= \frac{\frac{\partial \vartheta_2}{\partial v}}{P_2 - \vartheta_2 P_1} = \frac{\frac{\partial \vartheta_3}{\partial v}}{P_3 - \vartheta_3 P_1} = \cdots = \frac{\frac{\partial \vartheta_n}{\partial v}}{P_n - \vartheta_n P_1},$$

ein System von $(m + n) + (n - 1) - 1$ Gleichungen.

Zunächst finden wir die $n - 1$ Grössen ϑ als Functionen der Variablen x; ihre Ausdrücke enthalten eine Reihe von $n - 1$ willkürlichen unabhängigen Constanten. Werden die daraus abgeleiteten Werthe in die ersten $m + n - 1$ Gleichungen substituirt, so gehen

die letzteren über in Gleichungen zwischen den $m + n$ Variablen x allein, und wie in dem entsprechenden nach der Natani'schen Methode behandelten Falle einer einzigen Pfaff'schen Gleichung bilden die $m + n - 1$ Integrale dieser Gleichungen die neuen Variablen $u_1, \ldots, u_p$, welches $p (= m + n - 1)$ unabhängige Functionen von $x_1, \ldots, x_{m+n}$ sind.

Was die übrig bleibende Veränderliche v anlangt, so ist die einzige Bedingung, welcher sie unterworfen ist, die, dass sie eine Function der von $u_1, \ldots, u_p$ unabhängigen Variablen x sein muss. Abgesehen von dieser Bedingung können wir sie willkürlich wählen, und daher können wir $v = x_1$ nehmen, eine Annahme, die derjenigen Natani's für den entsprechenden Fall analog ist. Der Werth von λ_1 ist dann bestimmt durch eine Quadratur und die Werthe von $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ erhält man dann hieraus vermittelst der Werthe von $\vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$.

Beispiel 1. Die Hülfsgleichungen für das System

$$\Omega = dy + \sum_{s=1}^{n} Y_s dx_s = 0$$

$$\Upsilon = dz + \sum_{s=1}^{n} Z_s dx_s = 0$$

(welches die Bedingungen dafür sind, dass Ω und Υ derart transformirt werden können, dass sie frei von dv sind und $\lambda\Omega + \mu\Upsilon$ auch frei von v wird) sind:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial y} \frac{\partial x_i}{\partial v} + \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Z_i}{\partial y} \frac{\partial x_i}{\partial v}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial v} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial z} \frac{\partial x_i}{\partial v} + \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Z_i}{\partial z} \frac{\partial x_i}{\partial v}$$

$$0 = \frac{\partial y}{\partial v} + \sum_{s=1}^{n} Y_s \frac{\partial x_s}{\partial v}$$

$$0 = \frac{\partial z}{\partial v} + \sum_{s=1}^{n} Z_s \frac{\partial x_s}{\partial v}$$

$$0 = Y_s \frac{\partial \lambda}{\partial v} + Z_s \frac{\partial \mu}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v}\left(\lambda \frac{\partial Y_s}{\partial y} + \mu \frac{\partial Z_s}{\partial y}\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\lambda \frac{\partial Y_s}{\partial z} + \mu \frac{\partial Z_s}{\partial z}\right)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} (\lambda y_{s,i} + \mu z_{s,i}) \frac{\partial x_i}{\partial v},$$

wo die letzte Gleichung gilt für $s = 1, \ldots, n$ und

$$y_{s,i} = \frac{\partial Y_s}{\partial x_i} - \frac{\partial Y_i}{\partial x_s}$$

$$z_{s,i} = \frac{\partial Z_s}{\partial x_i} - \frac{\partial Z_i}{\partial x_s}$$

ist. In dem System von $n + 4$ Gleichungen sind nur $n + 3$ unabhängige Gleichungen.

Beispiel 2. Die beiden Gleichungen

$$\Omega = -dx_1 + \alpha_3 dx_3 + \alpha_4 dx_4 = 0$$

$$\Upsilon = -dx_2 + \beta_3 dx_3 + \beta_4 dx_4 = 0$$

mögen keiner Bedingung unterliegen. Nimmt man dann, wie im Text, $\lambda(\Omega + \vartheta\Upsilon)$ und transformirt auf neue Variablen u_1, u_2, u_3, v, so dass weder v noch dv in dem transformirten Ausdrucke für $\lambda(\Omega + \vartheta\Upsilon)$ vorkommt, so erhält man ein Resultat von der Form:

$$\lambda(\Omega + \vartheta\Upsilon) = U_1 du_1 + U_2 du_2 + U_3 du_3,$$

in welchem U_1, U_2, U_3 Functionen von u_1, u_2, u_3 allein sind. Nun ist die reducirte Form der rechten Seite (§ 126 u. 144):

$$dy_2 + y_3 dy_1,$$

wo y_1, y_2, y_3 Functionen von u_1, u_2, u_3 und daher Integrale des Hülfssystems sind, so dass y_1, y_2, y_3 und v als neue Variablen genommen werden können. Ueberdies sind die Integrale des Hülfssystems derart, dass, wenn sie in Υ substituirt werden, der neue Ausdruck von der Form ist:

$$V_1 dy_1 + V_2 dy_2 + V_3 dy_3,$$

wo die Coefficienten V Functionen von y_1, y_2, y_3 und v sind. Hiernach sind die ursprünglichen Gleichungen äquivalent mit:

$$dy_2 + y_3 dy_1 = 0$$

$$V_1 dy_1 + V_2 dy_2 + V_3 dy_3 = 0.$$

Die zweite von diesen kann mit Hülfe der ersten transformirt werden in

$$dy_3 + y_4 dy_1 = 0,$$

wo

$$y_4 = \frac{V_1 - V_2 y_3}{V_3}$$

ist. Da nun v beliebig gewählt werden kann, nur mit der einen Bedingung, dass es functional unabhängig von y_1, y_2, y_3 sein muss, so

können wir als vierte Variable für die Transformation irgend eine Function von v, y_1, y_2, y_3 wählen, welche nicht unabhängig von v ist und daher können wir y_4 als die vierte Variable nehmen.

Demnach können die gegebenen Gleichungen durch die beiden Gleichungen ersetzt werden:

$$dy_2 + y_3 dy_1 = 0$$
$$dy_3 + y_4 dy_1 = 0.$$

Dieses Resultat, wenn auch in verschiedener Weise und durch verschiedene Betrachtungen abgeleitet, wurde zuerst von Engel gegeben*). Er sprach auch das folgende Resultat aus, welches in Wirklichkeit eine Zusammenfassung mehrerer alternativen Resultate ist:

Das System von Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} -dx_1 + \alpha_3 dx_3 + \alpha_4 dx_4 = 0 \\ -dx_2 + \beta_3 dx_3 + \beta_4 dx_4 = 0 \end{aligned}\right\},$$

worin die Grössen α und β Functionen von x_1, x_2, x_3, x_4 sind, lässt sich in das eine oder andere Paar von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} dy_1 = 0 \\ dy_2 = 0 \end{aligned}\right\}; \quad \left.\begin{aligned} dy_2 - y_3 dy_1 = 0 \\ dy_4 = 0 \end{aligned}\right\}; \quad \begin{aligned} dy_2 - y_3 dy_1 = 0 \\ dy_3 - y_4 dy_1 = 0 \end{aligned}$$

transformiren. Die Integration der transformirten Gleichungen in dem dritten oben behandelten Falle ist bereits im Beispiel zu § 175 erörtert worden.

§ 182.

Wir nehmen nun an, dass die Hülfsgleichungen integrirt seien, was durch Gleichungen von der Form geschieht:

$$(4) \qquad \begin{cases} a_1 = h_1(x_1, \ldots, x_{m+n}, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1} = h_{n-1}(x_1, \ldots, x_{m+n}, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n), \end{cases}$$

um daraus zuerst die Grössen ϑ zu bestimmen. Werden die daraus abgeleiteten Werthe von ϑ in die $m + n - 1$ ersten Gleichungen substituirt, so dass dieselben Gleichungen in den Variablen x allein werden, so nehmen ihre Integrale die Form an:

$$(5) \qquad \begin{cases} u_1 = g_1(x_1, \ldots, x_{m+n}, a_1, \ldots, a_{n-1}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_p = g_p(x_1, \ldots, x_{m+n}, a_1, \ldots, a_{n-1}) \end{cases}$$

*) Zur Invariantentheorie der Systeme von Pfaff'schen Gleichungen, Leipz. Sitzungsber. (1889), S. 157—176.

und, wenn λ_1 bestimmt worden ist, lässt sich die Gleichung

$$\lambda_1(\Omega_1 + \vartheta_2\Omega_2 + \cdots + \vartheta_n\Omega_n) = \lambda_1\Omega,$$

ausdrücken in der Form

$$\lambda_1\Omega = U_1 du_1 + U_2 du_2 + \cdots + U_p du_p,$$

wo die Coefficienten U Functionen der Variablen u allein sind.

Die rechte Seite enthält implicit die Constanten $a_1, \ldots, a_{n-1}$, welche durch die Hülfsgleichungen unbestimmt gelassen werden. Demnach wird also, wenn ein anderes System von Constanten genommen wird, ein verschiedenes System von Grössen ϑ auftreten und somit wird sich ein neue Combination der Gleichungen (I) ergeben; und es ist ersichtlich, dass n verschiedene Systeme von Constanten zu n unabhängigen Combinationen der Gleichungen (I) und somit zu einem zum System (I) äquivalenten System von n Gleichungen führen werden.

Im Allgemeinen jedoch führt ein neues System von Constanten in (4) zu verschiedenen Ausdrücken für die Grössen ϑ, und wenn diese in die Hülfsgleichungen eingeführt werden, so werden sich letztere in ihrer Form ändern und somit werden auch die Grössen u andere werden. Hiernach wird im Allgemeinen das neue System von Gleichungen nicht durchweg dieselben Variabeln enthalten.

§ 183.

Nimmt man aber jetzt an, dass $a_1, \ldots, a_{n-1}$ ein gegebenes System von Constanten sind, und unterwirft man dieselben unendlich kleinen Variationen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, so wird es neue Multiplicatoren $\vartheta_2 + J_2, \ldots, \vartheta_n + J_n$ geben, wo die unendlich kleinen Grössen J bestimmt sind durch die $n-1$ Gleichungen:

$$\alpha_i = \sum_{r=2}^{n} J_r \frac{\partial h_i}{\partial \vartheta_r}$$

für $i = 1, \ldots, n-1$, und es wird neue Veränderlichen $u_1', \ldots, u_p'$ geben, welche gegeben sind durch

$$u_r' - u_r = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \frac{\partial g_r}{\partial a_i}.$$

Wenn dann alle Grössen $\frac{\partial g_r}{\partial a_i}$ für die p Werthe von r und die $n-1$ Werthe von i ausgedrückt werden können als Functionen von $u_1, \ldots, u_p$ und die Constanten a (die jetzt als ein bestimmtes System

betrachtet werden), so ist u_r' eine Function der p Grössen $u_1, \ldots, u_p$, und die Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, wenn diese Voraussetzung gerechtfertigt sein soll, sind die, dass $m+n$ Variablen x aus den $m+n$ die Grössen $u_1, \ldots, u_p$, $\frac{\partial g}{\partial a}$ enthaltenden Gleichungen sich müssen eliminiren lassen.

Es ist leicht zu beweisen, dass, wenn $A_1, \ldots, A_{m+n}$ die Ausdrücke von $X_1, \ldots, X_m$, $Y_1, \ldots, Y_n$ sind, nachdem in den letzteren die Werthe der Grössen ϑ, ausgedrückt durch die Variablen x und die Constanten a, substituirt sind, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die vorhergehende Voraussetzung erfüllt ist, die sind, dass die Gleichungen

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_1}{\partial a} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial a} = \cdots = \frac{1}{A_{m+n}}\frac{\partial A_{m+n}}{\partial a}$$

für alle Werthe a erfüllt seien. Dies erfordert, dass die Constanten a in $A_1, A_2, \ldots, A_{m+n}$ nur in so weit vorkommen, als sie etwa in einem allen gemeinsamen Factor auftreten. In diesem Falle ist die Differentialgleichung, welche von $u_1, \ldots, u_p$ befriedigt wird, d. i. die zu den Hülfsgleichungen des § 181 associirte Gleichung von der Form:

$$A_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + A_{m+n}\frac{\partial u}{\partial x_{m+n}} = 0,$$

eine Gleichung, welche nach Abwerfung eines den A gemeinschaftlichen Factors unabhängig von den Constanten a ist. Demnach sind sämmtliche Functionen g, welche Lösungen derselben sind, unabhängig von den a und somit wird $u' = u$ und das transformirte System wird durchgängig dieselben Variablen enthalten.

Das System wird daher die Form annehmen

$$\begin{aligned} U_1^{(1)}du_1 + \cdots + U_p^{(1)}du_p &= 0 \\ U_1^{(2)}du_1 + \cdots + U_p^{(2)}du_p &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ U_1^{(n)}du_1 + \cdots + U_p^{(n)}du_p &= 0, \end{aligned}$$

wo sämmtliche Coefficienten U Functionen der Variablen u sind. Da nun

$$m + n = k(n+1)$$

ist, so hat man:

$$p = m + n - 1 = (k-1)(n+1) + n,$$

d. h. das neue System hat n willkürliche Integrale und $(k-1)n$ bestimmte Integrale. Man kann annehmen, dass die ersteren seien

$u_1 = \text{const.}, \ldots, u_n = \text{const.}$, und kann das neue System in ein anderes verwandeln, welches nur $m - 1$ Variable und n Gleichungen enthält, d. h. wesentlich derselbe Fall wie der bereits behandelte.

Die Fälle, in denen die eben genauer angegebenen Bedingungen wirklich erfüllt sind, ergeben sich nur für sehr specielle Formen der Coefficienten in dem gegebenen System und daher nur sehr selten. Hieraus geht hervor, dass ein System simultaner bedingungsfreier Pfaff'scher Ausdrücke nicht nach einer Methode integrirt werden kann, welche die natürliche Verallgemeinerung der Natani'schen Methode ist.

Die partiellen Differentialgleichungen, welche in Bezug auf Einfachheit und Interesse gleich hinter den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer einzigen abhängigen Veränderlichen kommen, sind simultane partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei abhängigen Variablen. Die zu diesen gehörigen Hülfssysteme genügen nicht den angegebenen Bedingungen und daher können diese Gleichungen nach der vorhergehenden Methode nicht integrirt werden.

§ 184.

Grassmann*) hat gezeigt, dass die Integration einer partiellen Differentialgleichung irgend einer Ordnung ausgeführt werden kann nach der Integration der Gleichung $Xdx = 0$, wo Xdx nunmehr eine extensive Grösse und nicht bloss wie in Kapitel 5 eine Zahlgrösse ist. Dies lässt sich anwenden auf die Integration eines Systems bedingungsfreier Pfaff'scher Gleichungen, welche als speciellen Fall die Hülfsgleichungen einer partiellen Differentialgleichung von höherer als der ersten Ordnung einschliessen. Abgesehen aber von dem Beweise der Relation

$$Xdx = U_1 du_1 + U_2 du_2 + \cdots,$$

wo $u_1 = \text{const.}$, $u_2 = \text{const.}$, ... das Integralsystem des Systems von Gleichungen bilden und die Coefficienten U nicht mehr Zahlgrössen sind, hat Grassmann keinen eigentlichen Beitrag zur Auflösung weiter geliefert, wahrscheinlich weil die früheren für das Pfaff'sche Problem benutzten Methoden nicht länger mehr anwendbar waren.

§ 185.

Demnach erscheint die Lösung des Problems, das Integraläquivalent eines simultanen Systems bedingungsfreier Pfaff'scher

*) Ausdehnungslehre (Ausgabe von 1862) § 501.

Gleichungen zu finden, nach keiner der gegenwärtig bekannten Methoden, welche im Falle einer einzigen Pfaff'schen Gleichung zum Ziele führen, möglich. Dasselbe ist in der That eins der allgemeinsten Probleme der Integralrechnung; die Entdeckung seiner Lösung bleibt der Zukunft vorbehalten.

§ 186.

Dies ist der gegenwärtige Stand des zweiten der drei im § 175 aufgestellten Probleme. Das dritte dieser Probleme, nämlich die Verallgemeinerung einer gegebenen Lösung, ist (abgesehen von einigen wenigen besonderen Fällen wie z. B. in dem Beispiel des § 175) noch ungelöst und es geht aus der folgenden einfachen Darlegung hervor, dass die Verallgemeinerung ungelöst bleiben wird, bis das zweite der dort angegebenen Probleme seine Lösung gefunden haben wird.

Die Anzahl der Gleichungen in dem Integralsystem, welches einem Paar von bedingungsfreien Pfaff'schen Gleichungen mit sechs Veränderlichen äquivalent ist, ist nach § 176 gleich vier. Dieselben seien:

$$a = \text{const.}, \quad b = \text{const.}, \quad e = \text{const.}, \quad f = \text{const.},$$

so dass, wie dort, das reducirte äquivalente System von Differentialgleichungen ist:

$$\left.\begin{aligned} de &= A da + B db \\ df &= C da + D db \end{aligned}\right\},$$

wo A, B, C, D Functionen von a, b, e, f und der beiden andern neuen Variablen etwa x und y sind, die nöthig sind, um die ursprünglichen sechs Veränderlichen durch sie auszudrücken. Um nun das specielle System von Lösungen zu verallgemeinern, muss man die Gleichungen erhalten, welche den Uebergang von dem obigen Paare von Gleichungen zu

$$\begin{aligned} dr &= P dp + Q dq \\ ds &= R dp + S dq \end{aligned}$$

ermöglichen, wo p, q, r, s Functionen von a, b, e, f, x, y sind und P, Q, R, S, falls diese Functionen bekannt sind, durch blosse Substitution abgeleitet werden können.

Damit die Gleichungen äquivalent seien, müssen für gewisse Werthe von ϱ, σ, ϱ', σ' die Relationen

$$-dr + P dp + Q dq = \varrho\,(-de + A da + B db) + \sigma\,(-df + C da + D db)$$
$$-ds + R dp + S dq = \varrho'(-de + A da + B db) + \sigma'(-df + C da + D db)$$

durch passende Werthe von p, q, r, s, P, Q, R, S identisch befriedigt sein. Jede dieser Relationen giebt sechs Gleichungen. Eliminirt man ϱ, σ, P, Q aus der ersten Gruppe von sechs Gleichungen, so erhält man:

$$\frac{\partial(p, q, r)}{\partial(x, y, a)} + A\frac{\partial(p, q, r)}{\partial(x, y, e)} + C\frac{\partial(p, q, r)}{\partial(x, y, f)} = 0$$

$$\frac{\partial(p, q, r)}{\partial(x, y, b)} + B\frac{\partial(p, q, r)}{\partial(x, y, e)} + D\frac{\partial(p, q, r)}{\partial(x, y, f)} = 0,$$

und analog aus der zweiten Gruppe von sechs Gleichungen:

$$\frac{\partial(p, q, s)}{\partial(x, y, a)} + A\frac{\partial(p, q, s)}{\partial(x, y, e)} + C\frac{\partial(p, q, s)}{\partial(x, y, f)} = 0$$

$$\frac{\partial(p, q, s)}{\partial(x, y, b)} + B\frac{\partial(p, q, s)}{\partial(x, y, e)} + D\frac{\partial(p, q, s)}{\partial(x, y, f)} = 0,$$

zusammen also ein System von vier simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zur Bestimmung von vier abhängigen Variablen*).

Sofern nicht die abhängigen Veränderlichen in diesen Gleichungen theilweise separirt werden können, bleibt das System in seiner allgemeinsten Form und die Lösung des Systems hängt dann ab von derjenigen eines Systems von partiellen Differentialgleichungen mit mehreren abhängigen Veränderlichen und daher von derjenigen eines

---

*) Die Auflösung von n simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit n abhängigen und zwei unabhängigen Veränderlichen ist von Hamburger ausgeführt worden in seiner Abhandlung: „Zur Theorie der Integration eines Systems von n nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen und n abhängigen Veränderlichen“ Crelle's J. Bd. 93 (1882), S. 188—214. Aber seine Methode ist nur auf bedingungsfreie Gleichungen anwendbar, wenn die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen zwei ist. Ist die Anzahl m von unabhängigen Variablen grösser als 2 und enthalten die n simultanen Gleichungen n abhängige Variablen, dann müssen gewisse Bedingungen erfüllt sein, damit seine Methode anwendbar sei, und man kann beweisen, dass die Zahl dieser von einander unabhängigen Bedingungen gleich $(n-1)(m-2)$ ist.

Andere Untersuchungen (z. B. von S. v. Kowalevsky, Crelle's J. Bd. 80 (1875), S. 1—32) beziehen sich hauptsächlich auf den Beweis der Existenz der Lösungen solcher Systeme, wobei dieselben in der Form convergenter Reihen erhalten werden; es wird aber keine Integrationsmethode angegeben, ausser eben in Form von convergenten Reihen, welche willkürliche Anfangswerthe der Veränderlichen enthalten. Vgl. auch Bourlet, Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues, Paris 1891.

Systems von simultanen Pfaff'schen Gleichungen, ein Problem, das bisher noch ungelöst ist. Die natürlichste Methode, eine theilweise Separation der abhängigen Variablen zu versuchen, ist die Verallgemeinerung der Mayer'schen Methode (§ 134) in der Theorie der Berührungstransformationen. Wir setzen:

$$\frac{d}{da} = \frac{\partial}{\partial a} + A\frac{\partial}{\partial e} + C\frac{\partial}{\partial f}$$

$$\frac{d}{db} = \frac{\partial}{\partial b} + B\frac{\partial}{\partial e} + D\frac{\partial}{\partial f},$$

so dass die Gleichungen werden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{da} &= P\frac{dp}{da} + Q\frac{dq}{da} \\ \frac{dr}{db} &= P\frac{dp}{db} + Q\frac{dq}{db} \end{aligned}\right\}$$

nebst

$$\frac{\partial r}{\partial x} = P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = P\frac{\partial p}{\partial y} + Q\frac{\partial q}{\partial y},$$

welches alle von λ und μ freien Gleichungen sind, die man erhalten kann. Führt man seine Methode durch (ich führe dies hier nicht aus), so ergiebt sich, dass die resultirenden Gleichungen für P, Q, p, q nicht von der gewünschten Form sind, und daher ist die entsprechende theilweise Separation nicht möglich.

Hieraus schliessen wir, dass die Verallgemeinerung eines gegebenen speciellen Systems von Lösungen gegenwärtig nicht möglich ist, da sie von der Möglichkeit der Lösung des zweiten Problems abhängt, für welche es aber zur Zeit keine erfolgreiche Methode giebt.

Ergänzungen.

Zu den bibliographischen Notizen füge man hinzu:

Auf S. 254: Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre (Paris, Hermann 1890). Kap. 11.

Vivanti, Sulle transformazioni di contatto che transformano qualunque sviluppabile in una sviluppabile, Rendicont. Palermo, Bd. 5 (1891), S. 205—220.

Auf S. 333: Hamburger, Erweiterung eines Pfaff'schen Satzes auf simultane totale Differentialgleichungen erster Ordnung und Integration einer Klasse von simultanen partiellen Differentialgleichungen, Crelle's Journ. Bd. 110 (1892), S. 158.

Autorenverzeichniss.*)

Bach, siehe Stoffel.

Bäcklund, Einiges über Curven- und Flächentransformationen, Lunds Arsskrift Bd. 10, 1875. — Ueber Flächentransformationen, Math. Ann. Bd. 9, S. 297 — 320. — Ueber partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung, die intermediäre erste Integrale besitzen, Math. Annal. Bd. 11, S. 199—241. — Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Math. Annal. Bd. 17, S. 285 — 329. — Zur Theorie der Flächentransformationen, Math. Annal. Bd. 19, S. 387 — 422.

Bertrand, Journ. de l'Éc. Polyt. Bd. 17 (1841), S. 249 — 275. — Liouville's Journ. Bd. 14 (1849), S. 123 — 130. — Comptes Rendus Bd. 83 (1876), S. 1191 — 1195.

Biermann, Ueber n simultane Differentialgleichungen der Form $\sum_{\mu=1}^{n+m} X_\mu \, dx_\mu = 0$, Schlömilch's Zeitschrift Bd. 30, 1885, S. 234 — 244.

Binet, Sur la transformation de Pfaff relative aux fonctions différentielles linéaires contenant un nombre pair de variables, Comptes Rendus Bd. 15 (1842), S. 74 — 80.

Boole, On simultaneous differential equations of the first order in which the number of the variables exceeds by more than one the number of the equations, Phil. Trans. 1862, S. 437 — 454. — On the differential equations of dynamics, Phil. Trans. 1863, S. 485 — 501. — Supplementary volume of Treatise on Differential Equations, 1865, S. 74 — 89.

Bour, Sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier et du second ordre, Journ. de l'Éc. Polyt., Cahier 39, S. 148 — 191.

Bourlet, Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues. Paris 1891.

Brioschi, La teorica dei determinanti (1854).

Cauchy, Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique, Bd. 2.

*) Dieses Verzeichniss enthält die in vorliegendem Buche citirten Autoren und Abhandlungen, nebst einigen anderen, welche für die Theorie von Wichtigkeit sind.

Cayley, Démonstration d'un théorème de Jacobi par rapport au problème de Pfaff, Crelle's Journ. Bd. 57, S. 273—277.

Christoffel, Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, Crelle's Journ. Bd. 70 (1869), S. 46—70. — Ueber ein die Transformation homogener Differentialausdrücke zweiten Grades betreffendes Theorem, Crelle's Journ. Bd. 70, S. 241—245.

Clebsch, Ueber das Pfaff'sche Problem, Crelle's Journ. Bd. 60, S. 193—251; und Bd. 61, S. 146—179. — Ueber die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen, Crelle's Journ. Bd. 65, S. 257—269.

Collet, Intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction, Annales de l'École Norm. Supér. (Liège) 1870, 1. série Bd. 7, S. 59—88.

Darboux, Sur le problème de Pfaff, Comptes rendus Bd. 94 (1882), S. 835—837; Darb. Bull. des sc. math. et astr. 2. série Bd. 6 (1882), S. 14—36, 49—68.

Deahna, Ueber die Bedingungen der Integrabilität linearer Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen einer beliebigen Anzahl veränderlicher Gröfsen, Crelle's Journ. Bd. 20 (1840), S. 340—349.

De Morgan, On the integrating factor of $Pdx + Qdy + Rdz$, Quart. Journ. Bd. 2 (1858), S. 323—326.

Dirksen, Abh. d. königl. Ak. der Wissensch. zu Berlin (1836), S. 79—98.

Dubois-Reymond, Ueber die Integration linearer partieller Differentialgleichungen, denen durch ein Integral Genüge geschieht, Crelle's Journ. Bd. 70 (1869), S. 299—313. — Note über die Integration totaler Differentialgleichungen, Math. Annal. Bd. 12 (1877), S. 123—131.

Engel, Zur Invariantentheorie der Systeme von Pfaff'schen Gleichungen, Leipz. Sitzungsb. (1889), S. 157—176; ibid. (1890), S. 192—207. — Zur Theorie der Berührungstransformationen, Math. Annal. Bd. 23, S. 1. — Vgl. auch Lie.

Euler, Calc. Int., Bd. 3, Th. 1.

Fais, Giornale di Matematica (ed. Battaglini), Bd. 13, S. 323—327.

Forsyth, A Treatise on Differential Equations, London 1889, Macmillan & Co., 2. Ausg. (auch deutsch von H. Maser unter dem Titel: Lehrbuch der Differentialgleichungen, Braunschweig 1889). — Systems of Ternariants that are algebraically completed, Amer. Journ. of Math. Bd. 12 (1889), S. 1—60; 115—161.

Frisiani, Sull' integrazione delle equazioni differenziali ordinarie di primo ordine e lineari fra un numero qualunque di variabili, Anhang zu Effemeridi Astronomiche di Milano für 1848.

Frobenius, Ueber das Pfaff'sche Problem, Crelle's Journ. Bd. 82 (1877), S. 230—315. — Ueber homogene totale Differentialgleichungen, Crelle's Journ. Bd. 86 (1879), S. 1—19.

Gauss, Götting. gel. Anz. 1815, S. 1025—1038; Ges. Werke Bd. 3 S. 231—241.

Goursat, Leçons sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris, A. Hermann, 1891.

Grassmann, Die Ausdehnungslehre, vollständig und in strenger Form bearbeitet. Berlin 1862.

Hamburger, Grunert's Archiv Bd. 60 (1877), S. 185—214. — Zur Theorie der Integration eines Systems von n nicht linearen partiellen Differential-

gleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen, Crelle's Journ. Bd. 93 (1882), S. 188—215; Bd. 100, S. 390—404. — Erweiterung eines Pfaff'schen Satzes auf simultane totale Differentialgleichungen erster Ordnung und Integration einer Klasse von simultanen partiellen Differentialgleichungen, Bd. 110 (1892), S. 158.

Hamilton, On a general method in Dynamics. London 1834—35.

Hesse, De integratione aequationis differentialis partialis

$$A_1 - A_2 \frac{\partial x_1}{\partial x_2} - A_3 \frac{\partial x_1}{\partial x_3} - \cdots - A_{n-1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}}$$

$$+ A_n \left\{ x_2 \frac{\partial x_1}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial x_1}{\partial x_3} + \cdots + x_{n-1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}} - x_1 \right\} = 0, \text{ designantibus}$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ functiones quaslibet variabilium $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ lineares, Crelle's Journ. Bd. 25, S. 171—177.

Jacobi, Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Crelle's Journ. Bd. 2, S. 317—329; Ges. Werke Bd. 4, S. 1—15. — Ueber die Pfaff'sche Methode, eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zwischen $2n$ Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integriren, Crelle's Journ. Bd. 2, S. 347—357; Ges. Werke Bd. 4, S. 17—29. — Ueber die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Anzahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, Crelle's Journ. Bd. 17, S. 97—162; Ges. Werke Bd. 4, S. 57—127. — Dilucidationes de aequationum differentialium vulgarium systematis earumque connexione cum aequationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis, Crelle's Journ. Bd. 23, S. 1—104; Ges. Werke Bd. 4, S. 147—255. — Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi, Crelle's Journ. Bd. 27 und 29. — Nova Methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi, Crelle's Journ. Bd. 60, S. 1—181; Ges. Werke Bd. 5, S. 1—189. — Vorlesungen über Dynamik von C. G. J. Jacobi nebst fünf hinterlassenen Abhandlungen desselben, herausgegeben von A. Clebsch, Berlin 1866. Eine zweite Ausgabe 1884 von Lottner besorgt als Supplement zu den Ges. Werken.

Imschenetsky, Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, traduit du russe par Houël, Paris, Gauthier-Villars; Greifswald, Koch, 1869; erschien zuerst in Grunert's Archiv Bd. 50, S. 278—474. — Étude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes, traduit du russe par Houël, Paris, Gauthiers-Villars; Greifswald, Koch; erschien zuerst in Grunert's Archiv 1872, Bd. 54, S. 209—360 (auch deutsch von H. Maser als Anhang zu Mansion, Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung).

Joachimsthal, Ueber die Bedingungen der Integrabilität, Crelle's Journ. Bd. 33 (1846), S. 95—116 (abgedruckt aus dem Osterprogramm 1844 der kgl. Realschule zu Berlin).

Jordan, Cours d'Analyse de l'École Polytechnique. Paris, Gauthier-Villars, 1887, Bd. 3.

Kowalevsky, v., Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Crelle's Journ. Bd. 80 (1875) S. 1—32.

Kronecker, Ueber die Bedingungen der Integrabilität, Crelles Journ. Bd. 59, S. 311—312.

Lagrange, Sur l'intégration des équations à différences partielles du premier ordre, Abh. der Berl. Ak. 1772 S. 35; Oeuvres t. III, S. 549—577, Paris 1869. — Sur les intégrales particulières des équations différentielles, Abh. der Berl. Ak. 1774, S. 239; Oeuvres t. IV, S. 5—108. — Sur différentes questions d'analyse relatives à la théorie des solutions particulières, Abh. d. Berl. Ak. 1779, S. 121—160; Oeuvres t. IV, S. 585—634, Artikel V. — Méthode générale pour intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre, lorsque ces différences ne sont que linéaires, Abh. d. Berl. Ak. 1785, S. 174—190; Oeuvres t. V, S. 543—562.

Laurent, Mémoire sur les équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, Journ. de Liouville 1879, 3. série, Bd. 5, S. 249—284. — Nouvelles Annales, 3. série, Bd. 6, S. 19—24.

Legendre, Mémoire sur l'intégration des équations aux différences partielles, Mém. de l'Ac. des sciences de Paris 1787, S. 309—351.

Le Pont, Jornal de Matematicas, Bd. 8 (1887), S. 175—182.

Lie, Kurzes Resumé mehrerer neuerer Theorien (vorgelegt der Akad. zu Christiania, 3. Mai 1872). — Neue Integrationsmethode partieller Gleichungen erster Ordnung zwischen n Variabeln (ibid. 10. Mai 1872). — Ueber eine neue Integrationsmethode partieller Differentialgleichungen erster Ordnung (Gött. Nachr. 1872, S. 321—326). — Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, insbesondere üder eine Classification derselben (ibid. S. 473—489). — Ueber partielle Differentialgleichungen erster Ordnung (Akad. zu Christiania 1873, S. 16—51). — Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, in denen die unbekannte Function explicite vorkommt (ibid. 1873, S. 52—85). — Zur analytischen Theorie der Berührungstransformationen (ibid. 1873, S. 237—262). — Ueber eine Verbesserung der Jacobi-Mayer'schen Integrationsmethode (ibid. 1873, S. 282—288). — Neue Integrationsmethode eines $2n$-gliedrigen Pfaff'schen Problems (Arch. for Math. og Nat. Bd. 2, 1877, S. 338—379. — Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen (Math. Annal. Bd. 5, S. 145—256). — Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen (Math. Annal. Bd. 8, S. 215—303). — Ausserdem zahlreiche Abhandlungen in verschiedenen Journalen und insbesondere das unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel herausgegebene Werk: Theorie der Transformationsgruppen, Leipzig, B. G. Teubner, 3 Bde.

Lipschitz, Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen, Crelle's Journ. Bd. 70, S. 71—102; Bd. 72, S. 1—56. — Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen, Crelle's Journ. Bd. 71, S. 274—295.

Mansion, Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Gand 1875. (Auch deutsch von H. Maser unter dem Titel: Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Berlin, Julius Springer, 1892).

Maximowitch, Nouvelle méthode pour intégrer les équations simultanées aux différentielles totales. Paris, Gauthiers-Villars, 1879.

Mayer, Ueber die Jacobi-Hamilton'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Gött. Nachr. 1872, S. 405—420; Math. Annal. Bd. 3, S. 435—452. — Ueber die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit derselben unbekannten Function, Math. Annal. Bd. 4, S. 80—94. — Ueber unbeschränkt integrable Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen und die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen (Math. Annal. Bd. 5, S. 448—470). — Die Lie'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen (Math. Annal. Bd. 6, S. 162—191). — Directe Ableitung des Lie'schen Fundamentaltheorems durch die Methode von Cauchy (Math. Annal. Bd. 6, S. 192—196). — Zur Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (Gött. Nachr. 1873, S. 299—310). — Ueber die Lie'schen Berührungstransformationen, Gött. Nachr. 1874, S. 317—331; Math. Annal. Bd. 8, S. 304—312). — Directe Begründung der Theorie der Berührungstransformationen und eine Erweiterung der Lie'schen Integrationsmethode (Math. Annal. Bd. 8, S. 313—318). — Ueber die Weiler'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen, Math. Annal. Bd. 9, S. 347—370. — Zur Pfaff'schen Lösung des Pfaff'schen Problems Bd. 17, S. 523—530.

Monge, Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles (Hist. de l'Acad. des sciences de Paris), 1784. — Application de l'analyse à la géométrie, corrigée par Liouville, 5. éd.

Natani, Ueber totale und partielle Differentialgleichungen, Crelle's Journ. Bd. 58 (1860), S. 301—328. — Die höhere Analysis, Berlin 1866.

Pfaff, Methodus generalis aequationes differentiarum partialium nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotcumque variabiles complete integrandi, Abh. d. Berl. Akad. d. W. 1814—1815, S. 76—136.

Pittarelli, Giornale di Matematica (ed. Battaglini), Bd. 13, S. 323—327.

Pujet, Comptes Rendus Bd. 82 (1876), S. 740—743.

Raabe, Ueber die Integration der Differentialgleichungen von der Form $dz = Hdx + Kdy + Ldp + Mdq + Ndr + \cdots$, Crelle's Journ. Bd. 14, S. 123—168. — Ueber die Anzahl und die Form der Bedingungsgleichungen, unter welchen eine gewöhnliche Differentialgleichung zwischen zwei Variablen n^{ter} Ordnung von der Form: $V = y^{(n)}\varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) + \psi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$ das unmittelbare Differentiationsergebniss einer nach der allgemeinen Constanten aufgelösten analogen Differentialgleichung $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung ist, Crelle's Journ. Bd. 31, S. 181—212.

Sarrus, Comptes Rendus, Bd. 1 (1835), S. 115—117; Bd. 28 (1849), S. 439—442; Liouville's Journ., Bd. 14 (1849), S. 131—134.

Scott, Theory of Determinants and their applications. Cambridge.

Stodockiewicz, Krakauer Denkschriften, Bd. 12 (vgl. Fortschr. d. Math. 1886).

Stoffel und Bach, Liouville, 2. série, Bd. 7 (1862), S. 49—61.

Tanner, On the transformation of a linear differential expression, Quart. Math. Journ. Bd. 16 (1879), S. 45—64. — Preliminary note on a generalisation of Pfaff's problem, Lond. Math. Soc. Proc. Bd. 11 (1880), S. 131—139.

Vályi, Ueber die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen, Crelle's Journ. Bd. 95, S. 99—101.

Vivanti, Sulle transformazioni di contatto che transformano qualunque sviluppabile in una sviluppabile, Rendiconti, Palermo, Bd. 5 (1891), S. 205—220.

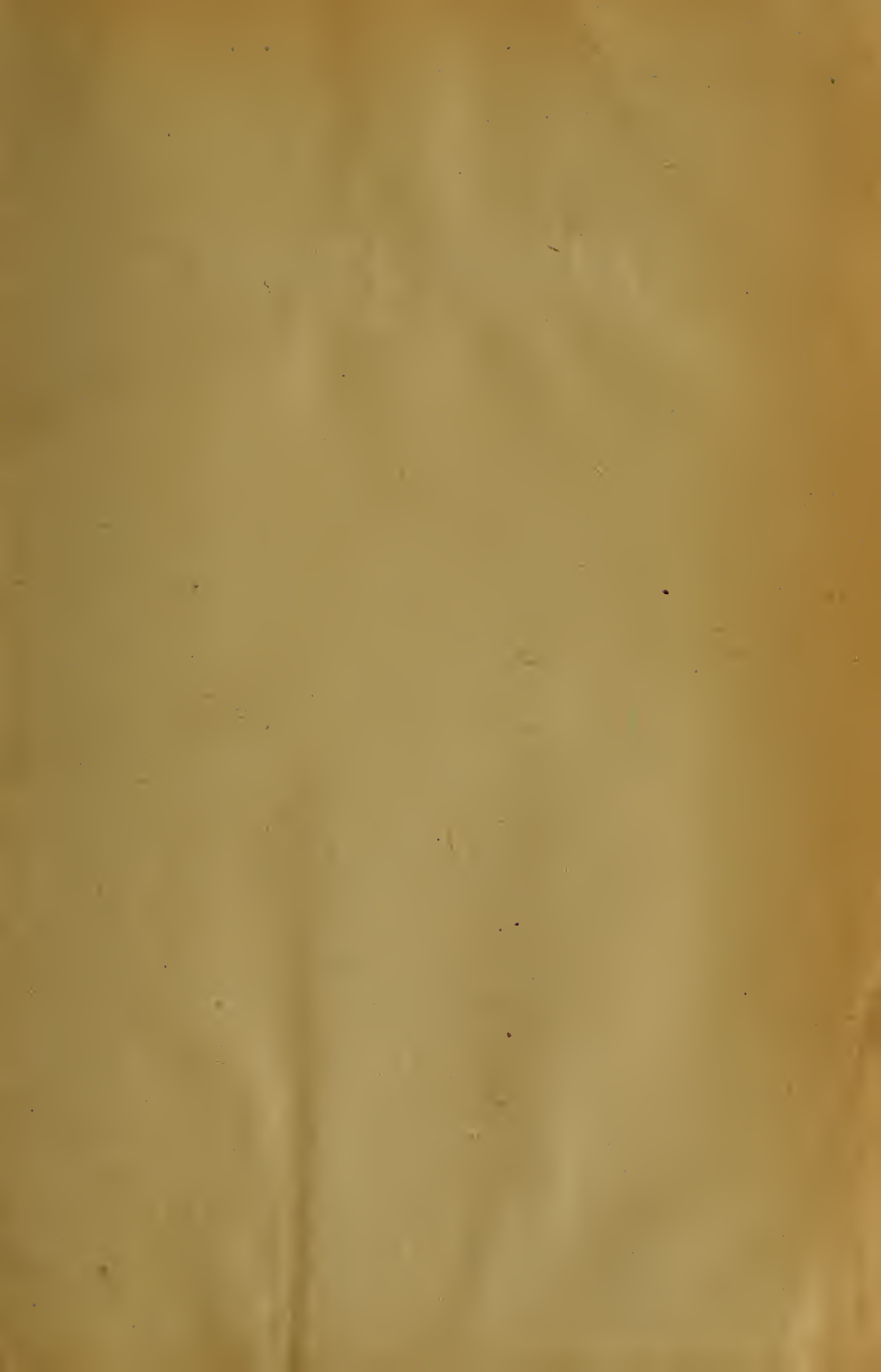
Voss, Geometrische Interpretation der Differentialgleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, Math. Annal. Bd. 16, S. 556—559. — Ueber die Differentialgleichungen der Mechanik, Math. Annal., Bd. 25 (1885).

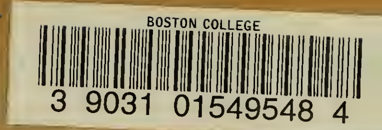
Weiler, Schlöm. Zeitschrift Bd. 20 (1875), S. 80—83.

Winckler, Wiener Sitzungsber. Bd. 88, Abth. II (1883), S. 820—834.








BOSTON COLLEGE
3 9031 01549548 4



